



No 114 (114) (2023)

**The scientific heritage**

(Budapest, Hungary)

The journal is registered and published in Hungary.

The journal publishes scientific studies, reports and reports about achievements in different scientific fields.

Journal is published in English, Hungarian, Polish, Russian, Ukrainian, German and French.

Articles are accepted each month.

Frequency: 24 issues per year.

Format - A4

**ISSN 9215 — 0365**

All articles are reviewed

Free access to the electronic version of journal

Edition of journal does not carry responsibility for the materials published in a journal.

Sending the article to the editorial the author confirms it's uniqueness and takes full responsibility for possible consequences for breaking copyright laws

**Chief editor:** Biro Krisztian

**Managing editor:** Khavash Bernat

- Gridchina Olga - Ph.D., Head of the Department of Industrial Management and Logistics (Moscow, Russian Federation)
- Singula Aleksandra - Professor, Department of Organization and Management at the University of Zagreb (Zagreb, Croatia)
- Bogdanov Dmitrij - Ph.D., candidate of pedagogical sciences, managing the laboratory (Kiev, Ukraine)
- Chukurov Valeriy - Doctor of Biological Sciences, Head of the Department of Biochemistry of the Faculty of Physics, Mathematics and Natural Sciences (Minsk, Republic of Belarus)
- Torok Dezso - Doctor of Chemistry, professor, Head of the Department of Organic Chemistry (Budapest, Hungary)
- Filipiak Paweł - doctor of political sciences, pro-rector on a management by a property complex and to the public relations (Gdansk, Poland)
- Flater Karl - Doctor of legal sciences, managing the department of theory and history of the state and legal (Köln, Germany)
- Yakushev Vasiliy - Candidate of engineering sciences, associate professor of department of higher mathematics (Moscow, Russian Federation)
- Bence Orban - Doctor of sociological sciences, professor of department of philosophy of religion and religious studies (Miskolc, Hungary)
- Feld Ella - Doctor of historical sciences, managing the department of historical informatics, scientific leader of Center of economic history historical faculty (Dresden, Germany)
- Owczarek Zbigniew - Doctor of philological sciences (Warsaw, Poland)
- Shashkov Oleg - Candidate of economic sciences, associate professor of department (St. Petersburg, Russian Federation)
- Gál Jenő - MD, assistant professor of history of medicine and the social sciences and humanities (Budapest, Hungary)
- Borbely Kinga - Ph.D, Professor, Department of Philosophy and History (Kosice, Slovakia)
- Eberhardt Mona - Doctor of Psychology, Professor, Chair of General Psychology and Pedagogy (Munich, Germany)
- Kramarchuk Vyacheslav - Doctor of Pharmacy, Department of Clinical Pharmacy and Clinical Pharmacology (Vinnytsia, Ukraine)

«The scientific heritage»

Editorial board address: Budapest, Kossuth Lajos utca 84, 1204

E-mail: [public@tsh-journal.com](mailto:public@tsh-journal.com)

Web: [www.tsh-journal.com](http://www.tsh-journal.com)

# **CONTENT**

## **AGRICULTURAL SCIENCES**

<i>Avramenko Ya., Basyuk D., Osinskyi S., Shamrai D.O., Yakovchuk R.</i>
BIOLOGICAL DIVERSITY OF THE STATE ENTERPRISE "KOROSTYSHIV FORESTRY" .....3

## **BIOLOGICAL SCIENCES**

<i>Sheiko V.</i>
INFLUENCE OF NASOFERON ON SYSTEMIC IMMUNITY DURING PHYSICAL EXERCISES .....9

## **ECONOMIC SCIENCES**

<i>Tajibaeva K.</i>
ACCOUNTABLES AND ITS ROLE IN FINANCING THE ACTIVITIES OF THE ENTERPRISE .....13

## **JURIDICAL SCIENCES**

<i>Lashchykhina V., Yanishevska Z., Lashchykhina I., Semylitko I.</i>
CORPORATE FORM OF FOREIGN INVESTMENT.....17

## **MEDICAL SCIENCES**

<i>Loza K., Boitsaniuk S.</i>
ENDODONTIC PERIAPICAL LESION: AN OVERVIEW ON THE ETIOLOGY, DIAGNOSIS AND CURRENT TREATMENT MODALITIES .....22

## **PHILOLOGICAL SCIENCES**

<i>Alirzayeva K.</i>
THE MAIN FEATURES OF PHONOTACTICS IN THE AZERBAIJANI AND ENGLISH LANGUAGES .....25

## **PHYSICS AND MATHEMATICS**

<i>Gorin V.</i>
RADIATION CONDITION FOR THE 3-DIMENSIONAL HELMHOLTZ EQUATION ON THE BOUNDARY OF A BOUNDED DOMAIN .....28

<i>Sadygov M., Sadygov I.</i>
ON AN EXTREMAL PROBLEM FOR DISCRETE INCLUSION WITH CONSTRAINT .....41

## **TECHNICAL SCIENCES**

<i>Franchuk Y., Peftieva I.</i>
AN ENERGY-EFFICIENT APPROACH TO GAS HEATING AND ACCOUNTING IN STATIONARY HYDRAULIC FRACTURING SYSTEMS OF THE GAS SUPPLY SYSTEM OF UKRAINE .....52
<i>Turdaleyev A.</i>
COMPARATIVE ANALYSIS OF DIFFERENT USER GROUPS USING CUSTOMER DEVELOPMENT METHODS.....57

<i>Baranov A., Baranov Yu., Brychynskyi O. Mishchenko V., Burashnikov O.</i>
JUSTIFICATION OF THE INITIAL PRINCIPLES OF PLANNING THE NEED FOR SPARE PARTS FOR ENGINEERING EQUIPMENT RECOVERY .....60
<i>Bekbaev G., Evglevskaya N., Shinkarev S.</i>
METHODOLOGY FOR FINDING OPTIMUM CONTROLLER LOCATION ON A SOFTWARE- CONFIGURABLE NETWORK .....64

# AGRICULTURAL SCIENCES

## БІОЛОГІЧНЕ РІЗНОМАНІТТЯ ДЕРЖАВНОГО ПІДПРИЄМСТВА «КОРОСТИШІВСЬКЕ ЛІСОВЕ ГОСПОДАРСТВО»

**Авраменко Я.В.**

бакалавр

**Басюк Д.О.**

бакалавр

**Осінський С.П.**

бакалавр

**Шамрай Д.О.**

бакалавр

**Яковчук Р.О.**

бакалавр

Поліський національний університет, м. Житомир, Україна

## BIOLOGICAL DIVERSITY OF THE STATE ENTERPRISE "KOROSTYSHIV FORESTRY"

**Avramenko Ya.,**

Bachelor student

**Basyuk D.,**

Bachelor student

**Osinskyi S.,**

Bachelor student

**Shamrai D.,**

Bachelor student

**Yakovchuk R.**

Bachelor student

Polissia National University, Zhytomyr, Ukraine

DOI: [10.5281/zenodo.8019693](https://doi.org/10.5281/zenodo.8019693)

### Анотація

В статті описані результати досліджень Червонокнижних видів в лісництві Коростишівського району Житомирської області.

Надано біологічну та таксаційну характеристику наявним лісовим насадженням лісництва. Проаналізовано типи лісу, вік насаджень, діаметр, висота дерев, біотоп. Більшість тимчасових пробних площ закладено в соснових насадженнях які є типовими для даної території дослідження. В ході проведення польових досліджень на території лісництва виявлено Червонокнижні види, а саме *Xylocopa violacea* L., *Lilium martagon* L.

### Abstract

The article describes the results of research on Red Book species in forestry in the Korostyshiv district of the Zhytomyr region.

The biological and taxonomic characteristics of existing forestry plantations are given. Forest types, age of plantations, diameter, height of trees, biotope was analyzed. Most of the temporary test areas are laid in pine plantations, which are typical for this study area. While conducting field research in the territory of forestry, Red Book species were found, namely *Xylocopa violacea* L., *Lilium martagon* L.

**Ключові слова:** соснові насадження, біотоп, тип лісу, Червонокнижні види.

**Keywords:** pine plantations, biotope, forest type, Red Book species.

**Вступ.** Під загрозою зникнення перебувають тисячі видів тварин і рослин: від жаб, свійської птиці до жирафів та слонів, від величезних рослин та коралів до крихітних комах.

Сьогодні на межі повного зникнення знаходяться близько мільйона видів флори та фауни. Багато тварин і рослин можуть бути безповоротно втрачені вже в найближчі десятиліття. Понад 90 відсотків морських рибних запасів зазнають перевороту або їх запаси стрімко скорочуються. З 1990 року Землі було втрачено 28,7 мільйонів гектарів лісів [4].

У доповіді ФАО, яка була присвячена сучасному стану біорізноманіття зазначається: «...що в останні десятиліття зникли багато рідкісних видів тварин, рослин та інших організмів, які відігравали важливу роль у продовольчому ланцюжку. Основні причини їх зникнення – зміна клімату, втрата місць проживання, надмірна експлуатація природних ресурсів, браконерство та незаконна торгівля» [4].

**Мета та методи досліджень.** Основною метою досліджень було виявити на території Дубове-

цького лісництва державного підприємства «Коростишівське лісове господарство» рідкісні види флори та фауни.

Методологічний підхід передбачав використання натурних спостережень якому притаманно системний підхід – дослідження, спостереження та аналіз. Даний метод охоплював польові та камеральні методи досліджень та аналізу.

Польові дослідження включали в себе закладання тимчасових пробних площ (ТПП) на території Дубовецького лісництва державного підприємства «Коростишівське лісове господарство». Дослідні ділянки в кількості 20 шт. закладали в типових для лісництв типах лісорослинних умов В2ДС (свіжа дубова судіброва) та С2ГДС (свіжий дубовий сугруд).

За допомогою GPS навігатора відмічали точки закладених пробних площ і знайдених Червоноокніжних видів рослин і тварин.

В камеральних умовах за допомогою програми 3D Maps нанесено точки на карту та побудовано 3D графіки.

**Результати дослідження.** Пробні площини закладали в типових для даного лісництва типу лісу В2ДС та С2ГДС, повнота на пробних площах від 0,30 до 0,55, вік дерев у насадженні від 81 до 121 років. Лісівничо-таксаційна характеристика пробних площ міститься у табл. 1. Розміщення пробних площ здійснювали за допомогою GPS навігатора (рис. 1).

Таблиця 1

**Лісівничо-таксаційна характеристика пробних площ**

№ ТПП	Квартал /Виділ	Площа ділянки, га	Склад насадження	Вік	Діаметр, см	Висота, м	Повнота	Тип лісу
1	1/14	0,9	10Cз	106	40,0	33,0	0,35	В2ДС
2	1/34	1,3	10Cз	109	42,2	33,6	0,4	В2ДС
3	1/39	1,9	10Cз	106	41,2	33,2	0,4	В2ДС
4	2/15	0,9	10Cз	120	44,2	36,0	0,5	В2ДС
5	3/16	1,2	10Cз+Влч	121	44,5	35,5	0,5	В2ДС
6	3/66	1,9	10Cз	121	45,0	35,8	0,3	В2ДС
7	43/11	2,3	10Cзк	81	34,1	29,8	0,55	В2ДС
8	43/42	2,7	10Cзк	81	34,0	29,8	0,55	В2ДС
9	43/20	2,7	10Cз	81	33,9	30,0	0,55	В2ДС
10	8/50	0,9	10Cз	111	42,0	34,8	0,3	В2ДС
11	13/18	1,0	8Дз2Cз+Бп	116	43,5	35,0	0,55	С2ГДС
12	18/26	0,6	10Cзк	91	37,2	31,9	0,55	С2ГДС
13	18/36	0,9	10Cзк	91	37,0	31,2	0,55	С2ГДС
14	19/27	1,9	10Cзк	91	37,1	31,5	0,55	С2ГДС
15	19/31	2,7	10Cзк	91	36,9	31,6	0,5	С2ГДС
16	19/47	0,7	10Cзк	91	37,3	31,0	0,6	С2ГДС
17	44/40	2,0	10Cз	81	34,1	29,9	0,55	С2ГДС
18	32/8	1,9	9Cз1Дз+Бп	81	33,9	29,8	0,5	С2ГДС
19	37/10	1,4	10Cз	81	35,0	29,7	0,5	С2ГДС
20	46/30	1,8	6Cз4Яле+Дз	85	34,5	30,5	0,6	С2ГДС

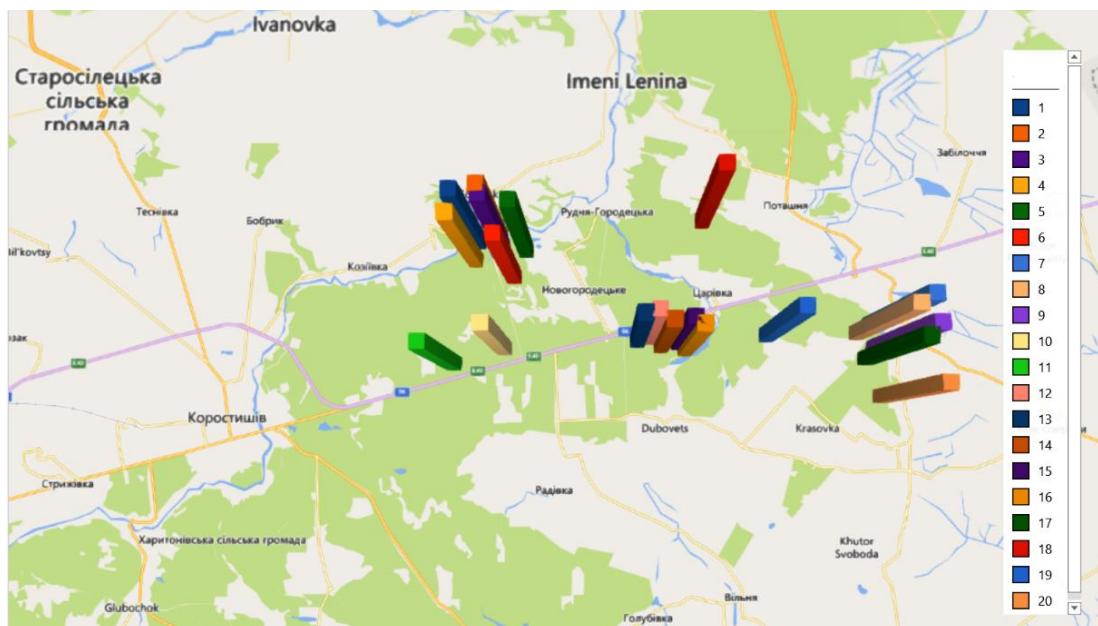


Рис. 1. Розміщення пробних площ на карті (за допомогою програми 3D карти)

За складом насадження пробні площи поділяються на: 14 ділянок чистих соснових деревостанів; та по одній ділянці: з переважанням сосни та включенням вільхи чорної; з 90% сосни звичайної та 10% дуба звичайного та берези повислої; з 60% соснових насаджень і 60% ялини європейської з та берези повислої; 80% дуба звичайного, 20% сосни звичайної та берези повислої (рис. 2).

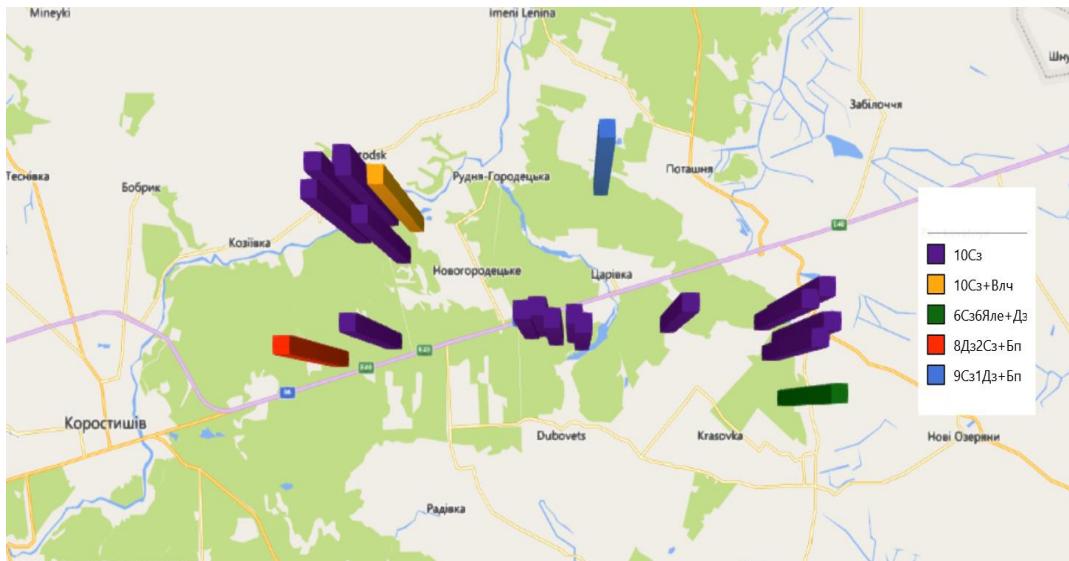


Рис. 2. Склад насадження на пробних площах

Десять пробних площ складалися зі свіжої дубової судіброви, та інші десять зі свіжого дубового суруду (рис. 3).

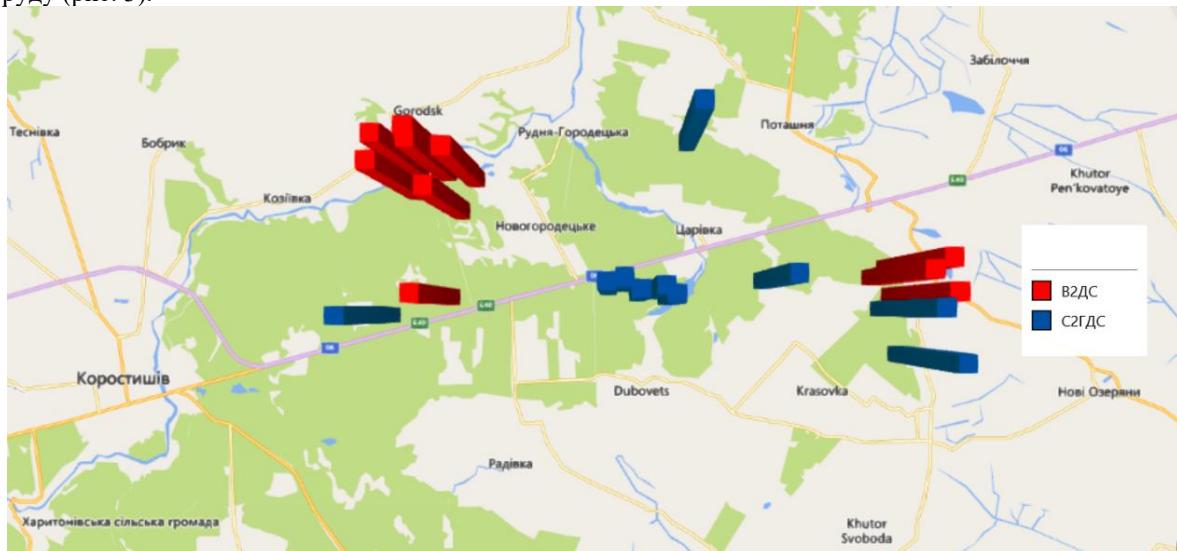


Рис. 3. Тип лісу на пробних площах

Вік насадження від 80 до 90 років – 7 пробних площ, від 90-100 років – 5 пробних площ, 100-110 років – 3 пробні площи, 120-130 років – 2 пробні площи (рис. 4).

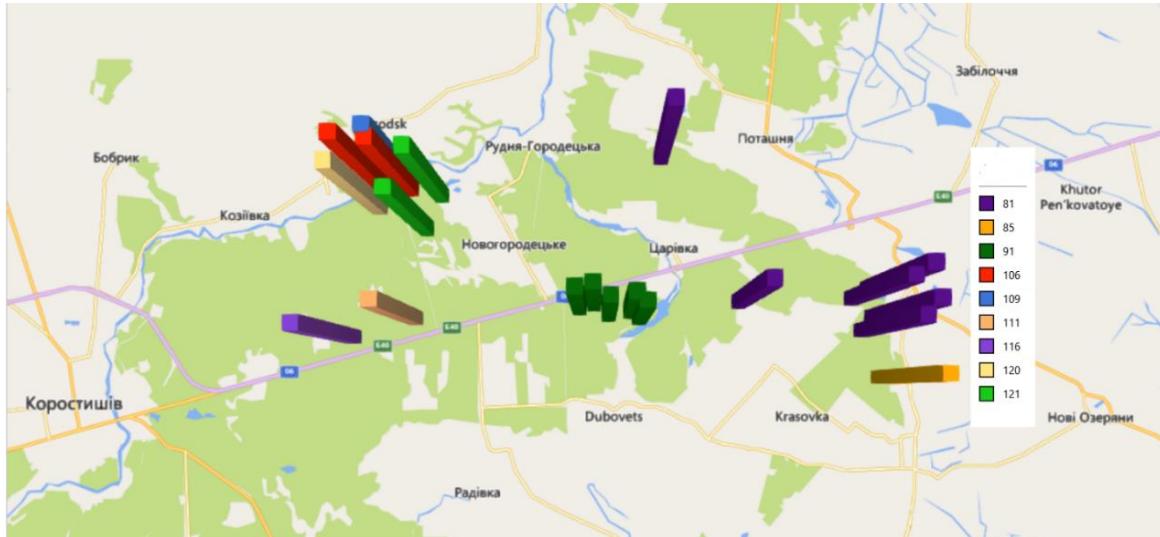


Рис. 4. Вік насадження на пробних площах

За повнотою насаджень 0,3 – 3 пробних площ, 0,4 – 2 пробні площини, 0,5 – 13 пробних площ і повнотою 0,6 – 2 пробні площини (рис. 5).

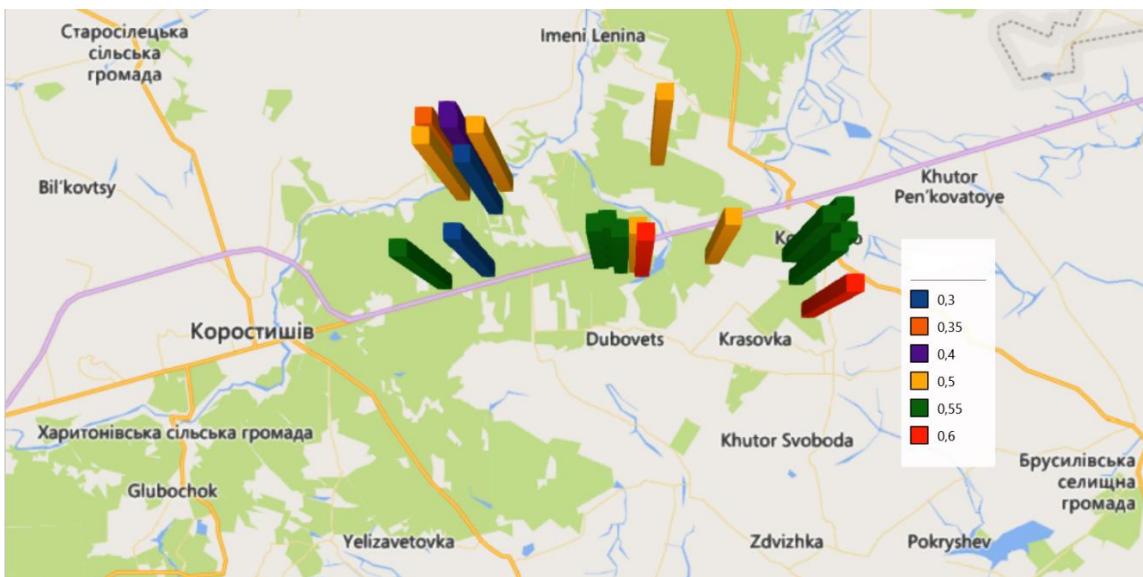


Рис. 5. Повнота насадження на пробних площах

На всіх пробних площах спостерігався типовий біотоп. За Національним каталогом біотопів України [3] більшість пробних площ належить до Д2.2.2 Ацидофільні свіжі та вологі ліси сосни звичайної окрім пробних площ 11, 18, 20. Пробні площи 11 та 18 належать до Д1.5.1 Ацидофільні дубові і сосново-дубові ліси, це рідкісний біотоп і 20 пробна площа до Д 2.6 Антропогенні хвойні ліси.

За Європейською інформаційною системою про природу (EUNIS) більшість пробних площ представлено G3.4 Ліси *Pinus sylvestris* на південь від тайги, лише пробні площи 11, 18 належить до G4.7 Мішані ацидофільні ліси *Pinus sylvestris* – *Quercus* [1].

Згідно з класифікацією українських біотопів UkrBiotop більшість пробних площ відносяться до: G:2.214 Свіжі соснові ліси зеленомохові.

За Національним каталогом біотопів України на сімнадцятих ТПП переважають Д2.2.2 Ацидо-

фільні свіжі та вологі ліси сосни звичайної, це переважно лиси які зростають на бідних кислих ґрунтах, переважно дерново-підзолистих, біотоп як правило стабільний при умові не втручання людини в екосистему. Дві пробні площини представлена Д1.5.1 Ацидофільні дубові і сосново-дубові ліси, це насадження з переважанням дуба звичайного що зростають на дерново-підзолистих ґрунтах. Біотоп на одній з пробних площ представлено Д2.6 Антропогенні хвойні ліси, для ТПП характерно штучно створені лісові культури де в першому ярусі зростають соснові дерева домінантні чагарникового ярусу – *Parthenocissus inserta*, *P. quinquefolia*, *Rubus idaeus*, *Sambucus nigra*, *S. racemosa*; домінантні трав'яно-чагарничко-вого ярусу – *Calamagrostis epigeios*, *Carex colchica*, *Chelidonium majus*, *Cynodon dactylon*, *Elytrigia repens*, *Impatiens parviflora*, *Inula salicina*, *Festuca beckeri*, *Secale sylvestre*, *Urtica dioica* [1].

Фітоценози на пробних площах представлено наступними рослинними угрупуваннями: дубово-сосновий ліс крушиново-орляково-малиново-чорничний – 1 пробна площа; дубово-сосновий ліс різноногий – 1 пробна площа; сосновий ліс бруснично-зеленохвойний – 1 пробна площа; сосняк малиново-зеленохвойний – 1 пробна площа; сосняк

орляково-зеленохвойний – 4; сосняк чорницево-зеленохвойний – 11 пробних площ; ялиново-сосновий ліс малиново-веснівковий – 1 пробна площа. Детальна інформація міститься у Додатку.

При проведенні аналізу Червоноокнижні види були виявлені на двох пробних площах № 5, 11 (рис. 6).

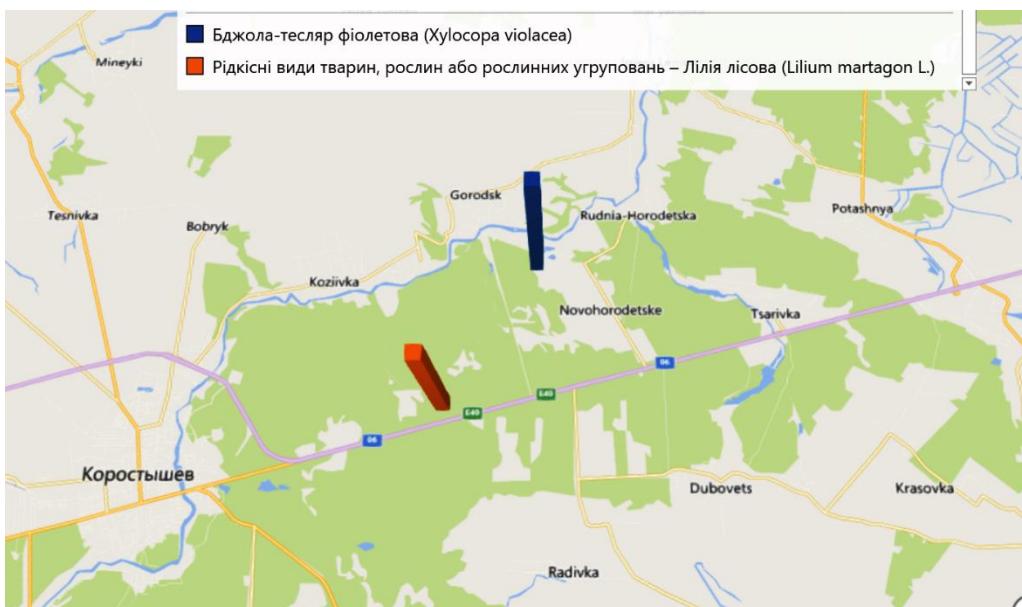


Рис. 6. Розміщення рідкісних видів на карті  
(за допомогою програми 3D карти)

В ході наукових досліджень на закладеній пробній площині №5 був виявлений Червоноокнижний вид ентомофаги ксилокопи (*Xylocopa violacea* L.) [9, 10].

*Xylocopa violacea* вважається видом що зникає в Україні. Здебільшого це пов'язано з рубанням сухостою у лісах, парках і садах. В наслідок антропогенної діяльності усуваються місця існування ксилокопи, адже самка готує своє гніздо у мертвій деревині на відкритій сонцю ділянці.

З метою збереження виду бджоли-тесляра фіолетової слід керуватися наступними правилами:

- ✓ залишити сухостій у садах, лугових садах, парках та лісових галевинах;
- ✓ залишити ями, вириті в палах і балках, доки вони не перевищують допустиму межу;
- ✓ забезпечити цілеспрямований вибір розкійних балок.

Даний вид у 1994 році був внесений у Червону книгу України [9, 10].

На пробній площині №11 виявлено лілію лісову (*Lilium martagon* L.) [2, 5, 6-8], рослина переважно зростає в напівтіньових місцях багатих на мінерально-гумусні речовини, з різноманітним гранулометричним складом – від пухких пісків до важких глин, з нейтральною або лужною реакцією. Зустрічається на освітлених лісових територіях, в основному дубово-грабових лісах і букових лісах, а також в змішаних лісах, і поза лісами в чагарниках, серед трав, у горах на пагорбах, у заростях карликової сосни та на пасовищах, на трав'янистих місцях серед скель. В Альпах дика рослина може зростати на висоті 2650 м над рівнем моря.

Вид знаходиться під загрозою зникнення через збирання для створення квіткових композицій та пересадки рослин з природного ареалу присадибні ділянки. Також *Lilium martagon* L. охоче поїдають козулі та інші жуйні ссавці. Лілія лісова знаходитьться під охороною в Україні з 1996 року [6-8].

#### Висновки.

Більшість соснових насаджень у Коростишівському районі Житомирської області належить до лісорослинних умов: В2ДС (свіжа дубова судіброва) та С2ГДС (свіжий дубовий сутруд).

Вік деревостанів у насаджені коливається від 80 до 100 років. Більшість насаджень у лісництві середньої повноти – 0,5.

За класифікацією українських біотопів UkrBiotop лісонасадження належать до: G:2.214 Свіжі соснові ліси зеленохвойні, а за Національним каталогом біотопів України Д2.2.2 Ацидофільні свіжі та вологі ліси сосни звичайної. Фітоценоз переважно сосняк чорницево-зеленохвойний.

Червоноокнижний вид *Xylocopa violacea* L. виявлено в типі лісу В2ДС, фітоценоз сосняк малиново-зеленохвойний, за Національним каталогом біотопів України – Д2.2.2 Ацидофільні свіжі та вологі ліси сосни звичайної; за EUNIS: G3.4 Ліси *Pinus sylvestris* на південь від тайги; за UkrBiotop: G:2.214 Свіжі соснові ліси зеленохвойні.

Червоноокнижний вид *Lilium martagon* L. виявлено в типі лісу С2ГДС, фітоценоз – дубово-сосновий ліс крушиново-орляково-малиново-чорничний, за Національним каталогом біотопів України – Д1.5.1 Ацидофільні дубові і сосново-дубові ліси; за EUNIS: G4.7 Мішані ацидофільні ліси *Pinus*

*sylvestris* – Quercus; Резолюція 4 Бернської конвенції: G1.8 Ацидофільні дубові ліси; Додаток 1 Оселищної Директиви: 9190 Старовікові ацидофільні дубові ліси з *Quercus robur* на піщаних рівнинах.

#### Список літератури

1. Дідух Я. П., Фіцайло Т. В., Коротченко І. А., Якушенко Д. М., Пашкевич Н. А. Біотопи лісової та лісостепової зон України / Ред. чл.-кор. НАН України Я. П. Дідух. Київ: ТОВ «МАКРОС», 2011. 288 с.
2. Моніторинг поширення лілій лісової в Україні. <https://uncg.org.ua/projects/zaluchennya-gromadskosti/liliya/>
3. Національний каталог біотопів України. За ред. А.А. Куземко, Я.П. Дідуха, В.А. Онищенка, Я. Шеффера. К.: ФОП Клименко Ю.Я., 2018. 442 с.
4. Скорочення біорізноманіття планети – пряма загроза благополуччу її мешканців. <https://news.un.org/ua/story/2019/05/1355591>
5. Український геоботанічний сайт. Біотопи України. <https://geobot.og.ua/biotope/>
6. Червона книга України. Рослинний світ / за ред. Ю. Р. Шеляга-Сосонка. Київ: Українська енциклопедія, 1996. 608 с.
7. Червона книга України. Рослинний світ / за ред. Я. П. Дідуха К. : Глобалконсалтинг, 2009. 912с.
8. Червона книга України. Рослинний світ / за ред. Я. П. Дідуха Київ: Глобалконсалтинг, 2009. 900 с.
9. Червона книга України. Тваринний світ / за ред. І. А. Акімова. Київ: Глобалконсалтинг, 2009. 600 с.
10. Червона книга України. Тваринний світ / за ред. М. М. Щербака. Київ: Українська енциклопедія, 1994. 464 с.

# BIOLOGICAL SCIENCES

## ВПЛИВ НАЗОФЕРОНУ НА СИСТЕМНИЙ ІМУНІТЕТ ПРИ ФІЗИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

**Шейко В.І.**

Волинський національний університет імені Лесі Українки,  
професор кафедра фізіології людини та тварин,  
доктор біологічних наук

## INFLUENCE OF NASOFERON ON SYSTEMIC IMMUNITY DURING PHYSICAL EXERCISES

**Sheiko V.**

Volyn National University named after Lesya Ukrainka,  
professor of the Department of Human and Animal Physiology,  
doctor of biological sciences

DOI: [10.5281/zenodo.8019699](https://doi.org/10.5281/zenodo.8019699)

### Анотація

Період підвищеної вразливості організму спортсменів до інфекцій після гострих і значних фізичних навантажень називають "відкритим вікном". Теорія "відкритого вікна" пов'язує зростання захворюваності спортсменів з короткочасним пригніченням імунної системи під впливом надмірних фізичних навантажень. Зниження імунітету є раннім симптомом порушення адаптації організму спортсмена і супроводжується зниженням протиінфекційного захисту, зменшенням фагоцитозу, міграцією лейкоцитів, зменшенням кількості еозинофілів і лімфоцитів у крові.

Метою нашого дослідження було визначити вплив імуностимулятора Назоферон на показники системного імунітету на тлі фізичних навантажень.

Наше дослідження доповнює загальні відомості про стан імунної системи спортсменів, а також можливості корекції імунодефіцитних станів, спричинених фізичними навантаженнями, зокрема неспецифічного протиінфекційного імунного захисту організму.

### Abstract

The period of increased susceptibility of athletes' bodies to infections after acute and significant physical exertion is called the "open window". The "open window" theory links the spike in sportsmen's illness with short-term suppression of the immune system under the influence of excessive physical exertion. Decreased immunity is an early symptom of impaired adaptation of the athlete's body and is accompanied by a drop in anti-infective protection, a decrease in phagocytosis, leukocyte migration, and a decrease in the number of eosinophils and lymphocytes in the blood.

The purpose of our study was to find out the effect of the immunostimulant "Nazoferon" on indicators of systemic immunity against the background of physical exertion.

Our research complements general information about the state of the immune system of athletes, as well as the possibility of correcting immunodeficiency states caused by physical exertion, namely non-specific anti-infectious immune protection of the body.

**Ключові слова:** системний імунітет, спортсмени, імуностимуляція, клітинний і гуморальний імунітет, неспецифічний імунітет.

**Keywords:** systemic immunity, athletes, immunostimulation, cellular and humoral immunity, non-specific immunity.

Дослідження на початку 21 століття, показують, що порушення здоров'я спортсменів і зниження спортивних результатів пов'язані з дефектами в неспецифічній резистентності та імунному захисті. Надмірні тренувальні та змагальні навантаження у спортсменів можуть формувати імунодефіцитні та аутоагресивні стани [3; 4; 6; 8].

Період підвищеної сприйнятливості організму спортсменів до інфекцій після гострих і значних фізичних навантажень називають «відкритим вікном». Теорія «відкритого вікна» пов'язує сплеск захворюваності спортсменів з короткочасною супресією імунної системи під впливом надмірних фізичних навантажень. Зниження імунітету є раннім симптомом порушення адаптації організму

спорtsмена [3; 6] і супроводжується падінням протиінфекційного захисту, зниженням фагоцитозу, міграцією лейкоцитів, зменшенням кількості еозинофілів і лімфоцитів в крові [5; 7; 8].

Імуносупресія у період інтенсивних тренувань носить мультифакторний характер [9].

Метою нашого дослідження було з'ясувати вплив імуностимулятора «Назоферон» на показники системного імунітету на тлі фізичних навантажень.

Імунологічний статус оцінювали за станом неспецифічної ланки Т- і В-систем. Досліджувалися наступні показники: кількість лейкоцитів у периферійній крові, лейкоцитарна формула, відносна та абсолютна кількість нейтрофілів, моноцитів, лім-

фоцитів, Т-лімфоцитів всіх популяцій і В-лімфоцитів за методикою моноклональних антитіл до специфічних рецепторів (CD3+, CD22+, CD4+, CD8+), а також концентрація Ig A, M, G та циркулюючих імунних комплексів (ЦІК) (високомолекулярних, середньомолекулярних, низькомолекулярних) в сироватці крові [2].

Весь отриманий експериментальний матеріал обробили методом параметричної і непараметричної статистики за програмами Statistica for Windows 5, Microsoft Excel – 2007. Цифрові масиви всіх отриманих показників обробляли для кожної групи окремо.

У дослідженні брали участь волонтери загальною кількістю 150 осіб (всі волонтери чоловічої статі віком у віці 18 – 25 років), які були розділені на три групи. Першу групу (контрольну) склали практично здорові нетреновані люди (50 осіб); другу (групу плацебо) склали 25 практично здорових нетренованих осіб і 25 спортсменів різного рівня підготовки ігор видів спорту, які під виглядом імуностимулятора отримували фізіологічний розчин; третю групу (експериментальну) склали практично здорові нетреновані люди (25 осіб) і спортсмени різного рівня підготовки ігор видів спорту (25 осіб), які отримували імуностимулятор «Назоферон».

Волонтери експериментальної групи отримували препарат протягом 7 днів 2 рази на день у формі спрею назально. Фізіологічний розчин група плацебо отримувала за такою ж схемою.

Назоферон – препарат на основі інтерферону людського рекомбінантного  $\alpha$ -2b. Препарат використовують як спрей назальний протягом 5–7 діб для профілактики; даний препарат не має протипоказань і побічних ефектів. Назоферон – противірусний, antimікробний, протизапальний, імуномодулючий, антипроліферативний засіб [1].

Всі волонтери давали письмову згоду на участь в науковому дослідженні та обробку експериментальних даних. Під час проведення досліджень усі групи знаходились під контролем лікаря-терапевта.

Робота проводилася відповідно до нормативних вимог, які діють в Україні, і норм, які застосовуються в міжнародній практиці, – правил ICH GCP, Гельсінської декларації (2000).

Наше дослідження виявило відмінності імунологічних показників периферичної крові спортсменів різного рівня підготовки ігор видів спорту щодо практично здорових нетренованих людей.

У групі спортсменів, щодо практично здорових нетренованих осіб, спостерігалося достовірне зниження абсолютної кількості Т-лімфоцитів (мембраний маркер CD3+), Т-лімфопенія була обумовлена зниженням кількості Т-хелперів/індукторів (CD4+-клітини) ( $p < 0,05$ ) і Т-супресорів/цитотоксичних (CD8+-клітини) ( $p < 0,05$ ). Ці дані вказують на дисфункцію клітинної ланки системного імунітету. Абсолютне число Т-лімфоцитів (мембраний маркер CD3+) знижувалося на 46,81% за рахунок зниження CD4+-клітин на 39,56% і CD8+-клітин на

38,46%. Показники В-лімфоцитів (CD22+ клітини), NK (CD16+ клітини) не мали змін.

Неспецифічний протиінфекційний імунітет у спортсменів був знижений, по відношенню до практично здорових нетренованих осіб, на що вказує зниження відносного і абсолютноого числа лімфоцитів на 33,81% ( $p < 0,05$ ) і 36,84% ( $p < 0,05$ ) відповідно та підвищення відносної кількості нейтрофілів на 6,89% ( $p < 0,05$ ), за рахунок підвищення відносного числа сегментоядерних нейтрофілів на 7,59% ( $p < 0,05$ ), що веде до порушення лейкоцитарної формули. Відносна і абсолютно кількість моноцитів у спортсменів і практично здорових нетренованих осіб не відрізняється.

У гуморальній ланці системного імунітету нами також виявлено зниження концентрації IgG і IgM на 23,48% і 39,56% відповідно, що також вказує на дисфункцію гуморальної ланки імунної системи у спортсменів. Зміни концентрації IgA не спостерігались.

Згідно літературних даних, змагальні навантаження у спортсменів приводили до зменшення кількості лімфоцитів, значного пригнічення фагоцитарної активності лейкоцитів і зниження кількості імуноглобулінів класів IgG та IgM [3].

У спортсменів різного рівня підготовки ігор видів спорту ми спостерігали підвищення загального числа ЦІК на 84,7 о.о.щ., концентрація низькомолекулярних комплексів підвищувалася на 171,1 о.о.щ., число високомолекулярних комплексів було знижено на 74,3 о.о.щ., по відношенню показників контрольної групи. Спостерігалася тенденція до зниження середньомолекулярних комплексів (12,1 о.о.щ.). Це вказує на пригнічення імунної системи, яке виявляється посиленням імунокомплексних реакцій. Важливо зауважити, що концентрація загальних ЦІК була вища за норму (<120 о.о.щ.) і в групі спортсменів, і в групі практично здорових нетренованих осіб.

Застосування спортсменами різного рівня підготовки ігор видів спорту та практично здоровими нетренованими особами протягом 7 днів фізіологічного розчину під виглядом імуностимулятора «Назоферон» не викликало змін показників системного імунітету. Це вказує на відсутність ефекту навіювання та самонавіювання.

Застосування назоферону викликало підвищення Т-лімфоцитів (CD3+-клітини) на 24,00% ( $p < 0,05$ ), кількості Т-хелперів/індукторів (CD4+-клітини) на 25,93% ( $p < 0,05$ ) і Т-супресорів/цитотоксичних (CD8+-клітини) на 39,13% ( $p < 0,05$ ). Отримані дані вказують на підвищення резистентності організму, хоча рівня показників практично здорових осіб, які не займались спортом, не було досягнуто. Зростання кількості Т-супресорів/цитотоксичних (CD8+-клітини) перевишило зростання кількості Т-хелперів/індукторів (CD4+-клітини), на що також вказує зниження індексу імунорегуляції. Переважання цитотоксичних Т-супресорів могло бути викликано зниженням необхідності імунної відповіді, хоча це питання потребує додаткових досліджень. Кількість В-лімфоцитів (CD22+-клітини) і NK (CD16+-клітини) достовірно не змінювалась.

Подібні тенденції спостерігалися в підгрупі практично здорових нетренованих людей, які приймали імуностимулятор «Назоферон» впродовж 7 діб, але достовірних змін показники периферійної

крові не зазнали. Це вказує на те, що вплив назоферону на показники системного імунітету спортсменів різного рівня підготовки ігрових видів спорту більший, ніж на показники периферійної крові практично здорових нетренованих осіб (Табл. 1.).

Таблиця 1.

**Показники системного імунітету периферійної крові спортсменів різного рівня підготовки ігрових видів спорту та практично здорових нетренованих людей експериментальної групи.**

Показники	Кон- троль (n=50)	Експеримент (n=25) Практично здо- рові нетреновані люди		Експеримент (n=25) Спортсмени	
		до застосу- вання «Назо- ферону»	після застосу- вання «Назо- ферону»	до застосу- вання «Назо- ферону»	після застосу- вання «Назо- ферону»
CD3+, *10 <sup>9</sup> /л	1,41± 0,08	1,41± 0,08	1,53± 0,06	0,75± 0,08	0,93± 0,07*
CD4+, *10 <sup>9</sup> /л	0,91± 0,06	0,91± 0,06	1,01± 0,05	0,54± 0,06	0,68± 0,06*
CD8+, *10 <sup>9</sup> /л	0,39± 0,04	0,39± 0,04	0,44± 0,05	0,23± 0,03	0,32± 0,02*
CD22+, *10 <sup>9</sup> /л	0,30± 0,04	0,30± 0,04	0,31± 0,05	0,28± 0,05	0,29± 0,06
CD4+/ CD8+	2,33± 0,14	2,33± 0,14	2,30± 0,12	2,34± 0,13	2,13± 0,15*
CD16+, *10 <sup>9</sup> /л	0,16± 0,01	0,16± 0,01	0,16± 0,02	0,14± 0,01	0,15± 0,02
Лейко-цити	x10 <sup>9</sup> /л	6,82± 0,28	6,83± 0,28	6,52± 0,15	6,51± 0,21
Лімфо-цити	Від- носн., %	27,86± 1,32	27,88± 1,36	29,45± 1,55	18,43± 1,34
	Абсол., x10 <sup>9</sup> /л	1,90± 0,06	1,89± 0,06	1,92± 0,07	1,20± 0,05
Моно-цити	Від- носн., %	10,41± 0,22	10,41± 0,22	10,75± 0,35	10,75± 0,21
	Абсол., x10 <sup>9</sup> /л	0,71± 0,05	0,71± 0,05	0,70± 0,05	0,70± 0,05
Ней-тро- філи	Від- носн., %	61,29± 1,09	61,33± 1,11	61,35± 1,25	64,82± 1,13
	Абсол., x10 <sup>9</sup> /л	4,18± 0,05	4,19± 0,05	4,00± 0,06	4,22± 0,06
Палич коядерні нейтрофіли	Від- носн., %	3,81± 0,07	3,81± 0,06	4,05± 0,12	3,63± 0,11
	Абсол., x10 <sup>9</sup> /л	0,26± 0,02	0,26± 0,02	0,26± 0,03	0,24± 0,02
Сегментоя- дерні нейт- рофіли	Від- носн., %	57,48± 1,18	57,52± 1,19	57,30± 0,95	61,19± 1,31
	Абсол., x10 <sup>9</sup> /л	3,92± 0,08	3,92± 0,08	3,74± 0,11	3,98± 0,07
Ig G, мг/мл		12,31± 0,42	12,33± 0,40	12,45± 0,45	9,43± 0,27
Ig A , мг/мл		1,97± 0,07	1,95± 0,07	1,85± 0,08	1,96± 0,12
Ig M, мг/мл		2,19± 0,15	2,17± 0,15	2,05± 0,12	1,08± 0,08
ЦК загальні, о.о.щ.		186,2± 9,1	182,4± 8,7	171,2± 6,4	272,8± 9,5
ЦК високомол., о.о.щ.		88,5± 7,3	87,5± 7,3	94,1± 4,5	20,3± 2,5
ЦК середньомол., о.о.щ.		59,4± 6,8	59,4± 6,8	58,9± 6,2	49,0± 4,1
ЦК низькомол., о.о.щ.		38,3± 7,1	35,5± 7,3	18,2± 6,5*	210,9± 8,1
					181,4± 7,7*

Примітка: \* - p<0,05 - достовірність змін показників у осіб-спортсменів експериментальної групи після курсу застосування препарату «Назоферон» порівняно з величинами цих показників до початку застосування препарату «Назоферон».

Відносно неспецифічного імунного захисту при застосуванні «Назоферону» спортсменами відмічалось достовірне зниження абсолютноого числа лейкоцитів, підвищення відносної і абсолютної кількості лімфоцитів ( $p<0,05$ ). Абсолютне число лейкоцитів знижувалося на 7,07% ( $p<0,05$ ), абсолютнона кількість лімфоцитів підвищувався на 15,83% ( $p<0,05$ ). Це може вказувати на відновлення імунних показників.

У спортсменів, які отримували препарат «Назоферон», ми встановили зниження абсолютної кількості нейтрофілів на  $0,31 \times 10^9/\text{л}$  (7,35%) ( $p<0,05$ ), за рахунок достовірного зниження абсолютноого числа сегментоядерних нейтрофілів на  $0,36 \times 10^9/\text{л}$  (9,05%) та підвищення відносної і абсолютної кількості паличкоядерних нейтрофілів на 1,33% і  $0,06 \times 10^9/\text{л}$  (25%) відповідно ( $p<0,05$ ), що, на нашу думку, пов'язано з активацією фагоцитарної активності нейтрофілів, відповідно до інструкції до застосування препарату «Назоферон» (Табл. 1.).

Відносно неспецифічного імунного захисту при застосуванні «Назоферону» практично здоровими нетренованими особами достовірних змін показників периферійної крові не спостерігалось (Табл. 1.).

Семиденне застосування препарату «Назоферон» спортсменами викликало достовірне підвищення вмісту IgG на 6,68%, спостерігалася тенденція до зниження IgA 6,48% і IgM 10,20% ( $p>0,05$ ) (Табл. 1.).

Змін показників IgA, IgM, IgG периферійної крові практично здорових нетренованих людей, які протягом 7 днів отримували імуностимулятор «Назоферон», не спостерігалось (Табл. 1.).

Імуностимулятор «Назоферон» викликав у периферійній крові спортсменів достовірне зниження концентрації загальних ЦІК на 21,6 о.о.щ. (7,92%), за рахунок зниження вмісту низькомолекулярних комплексів на 29,5 о.о.щ. (13,99%) ( $p<0,05$ ) і одночасного підвищення концентрації високомолекулярних комплексів на 7,4 о.о.щ. (57,36%) ( $p<0,05$ ). Вміст середніх ЦІК не змінювався. Позитивна дія «Назоферону» спостерігалася в зниженні загальної кількості ЦІК, а саме найбільш патогенних низькомолекулярних ЦІК, при цьому збільшувалася частка найменш патогенних високомолекулярних ЦІК.

Це вказує на зниження комплексоутворення та відносне зменшення ризику виникнення запальних процесів у спортсменів після вживання «Назоферону». Хоча показники концентрації загальних ЦІК у периферійній крові спортсменів та практично здорових нетренованих людей експериментальної групи так і не досягли рівня нормальних значень ( $<120$  о.о.щ.). Це питання потребує більш детального дослідження (Табл. 1.).

Подібні зміни внаслідок застосування препарату «Назоферон» спостерігалися і у підгрупі практично здорових нетренованих людей.

Таким чином, наше дослідження доповнює загальні відомості про стан імунної системи спортсменів, а також можливість корекції імунодефіцитних станів, викликаних фізичними навантаженнями, а саме неспецифічного протиінфекційного імунного захисту організму.

Використання препарату «Назоферон» викликало практично повну корекцію змін неспецифічної клітинної ланки системного імунітету у спортсменів різного рівня підготовки ігорних видів спорту.

### Список літератури

1. Інструкція для медичного застосування препарату НАЗАФЕРОН, затверджено наказом Міністерства охорони здоров'я України від 24.01.11 № 33. Сертифікат про державну реєстрацію № UA/15653/01/01 Термін державної реєстрації: з 15.12.2021 по 15.12.2026.
2. Клінічна лабораторна діагностика: підручник / Л. Є. Лаповець, Г. Б. Лебедь, О. О. Ястремська та ін.; за ред. Л. Є. Лаповець. – 2-е вид. стер. – К.: ВСВ «Медицина», 2021. – 472с.
3. Ропаєва М. О. Вплив назоферону на показники гомеостазу у спортсменів. / М. О. Ропаєва, В. І. Шейко // Матеріали XIX-го з'їзду Українського фізіологічного товариства ім. П. Г. Костюка з міжнародною участю, присвяченого 90-річчю від дня народження академіка П. Г. Костюка. Фізіологічний журнал, том 60 № 3. – Львів, 2014. – 270 с., С. 172.
4. Флегонтова В. В. Метаболические, иммунные и гематологические изменения у спортсменов разных специализаций (рукопашный бой, борьба дзюдо, бодибилдинг) и их коррекция. / В. В. Флегонтова, В. И. Шейко, Г. В. Ясько, Е. Р. Линниченко, В. В. Морфунцов, Т. Л. Мовчан, Н. В. Лицоєва. – Луганськ: СПД Резников В. С., 2012. – 112с.
5. Fahlman M. M., Engels H. J. Mucosal IgA and URTI in American college football players: a year longitudinal study // Med. Sci. Sports Exerc. – 2005 Mar. – 37 (3): P. 374 – 380.
6. Gani F., Passalacqua G., Senna G. et al. Sports, immune system and respiratory infections // Allerg Immunol. (Paris). – 2003. – № 35 (2). – P. 41 – 46.
7. Kakanis, M. W., Peake, J., Brenu, E. W., Simmonds, M., Gray, B., Hooper, S. L., Marshall-Gradisnik, S. M. The open window of susceptibility to infection after acute exercise in healthy young male elite athletes // Exercise Immunology Review. – 2010. – № 16. – P. 119 – 137.
8. Murakami S., Kurihara S., Titchenal C., Ohtani M. Suppression of exercise-induced neutrophilia and lymphopenia in athletes by cystine/theanine intake: a randomized, double-blind, placebo-controlled trial // J Int Soc Sports Nutr. – 2010. – № 7 (1). - P. 142-151.
9. Venkataraman, C., Negi, G., Sardar, S.B., Rastogi, R. Size distributions of polycyclic aromatic hydrocarbons in aerosol emissions from biofuel combustion // Journal of Aerosol Science. – 2002. – № 33. – P. 503 – 518.

**КРЕДИТОРСКАЯ ЗАДОЛЖЕННОСТЬ И ЕЕ РОЛЬ В ФИНАНСИРОВАНИИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ****Тажибаева К.А.**

*PhD по экономическим наукам, доцент кафедры «Финансы и бизнес-аналитика»  
Ташкентского государственного экономического университета*

**ACCOUNTABLES AND ITS ROLE IN FINANCING THE ACTIVITIES OF THE ENTERPRISE****Tajibaeva K.**

*PhD in Economics, Associate Professor of the Department of Finance and Business Analytics,  
Tashkent State University of Economics  
DOI: [10.5281/zenodo.8019701](https://doi.org/10.5281/zenodo.8019701)*

**Аннотация**

В статье даны определения кредиторской задолженности, раскрыта их классификация. Достигнута главная цель, анализированы материалы на основе данных кредиторской задолженности акционерного общества «Ўзбекистон темир йўлари». Кроме того, рассмотрено влияние задолженностей на финансовое состояние предприятия и рекомендуются предложения которые позволит увеличить эффективность управления кредиторской задолженностью предприятия.

**Abstract**

The article gives definitions of accounts payable, discloses their classification. The main goal was achieved, materials were analyzed on the basis of data on accounts payable of the joint-stock company “Uzbekistan Railways”. In addition, the impact of debts on the financial condition of the enterprise is considered and proposals are recommended that will increase the efficiency of managing the accounts payable of the enterprise.

**Ключевые слова:** кредиторская задолженность, финансовое состояние, предприятия, эффективность, управление.

**Keywords:** accounts payable, financial condition, enterprises, efficiency, management.

A stable source of financial resources for any business entity is accounts payable, which is constantly at its disposal. These are, first of all, wage arrears, deductions to off-budget funds, reserves (for holidays), in accordance with the accounting policy, as well as advances from buyers, debts to suppliers and debts on taxes and fees. The formation of accounts payable to the employees of the enterprise for the payment of wages is due to the fact that in the composition of the proceeds from the sale there is necessarily a part of the funds for the reimbursement of labor costs.

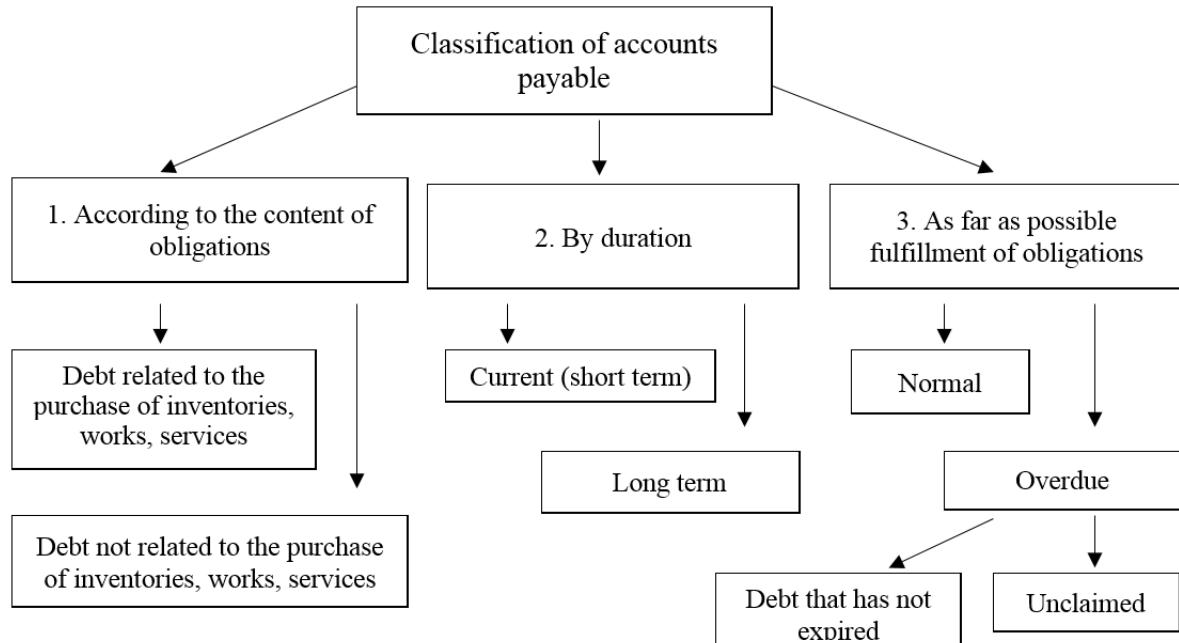
The urgency of the problem is manifested in the fact that arising from the conduct of the financial and economic activities of the enterprise, forms a current and long-term diversion or attraction of funds, familiar to us as receivables and payables, they primarily affect solvency.

Unlike accounts receivable, accounts payable is perceived as a liability that adversely affects the activities of the enterprise.

Accounts payable is understood as a part of the property of the enterprise, which is the subject of legal obligations between the organization and its creditors. The economic component includes a part of the property of the enterprise (usually cash) and inventory items.

Types of accounts payable are shown in Figure 1.

As shown in Figure 1, according to the content of obligations, accounts payable can be associated with the acquisition of inventories (inventory), works and services (for purchased products, services and goods, as well as for bills presented for payment) and is not related with it (debts on settlements with the budget, debts to subsidiaries and affiliates, to the organization's personnel, to participants (founders) for the payment of income, other debts).

Figure 1. Classification of accounts payable<sup>1</sup>

The organization owns and uses accounts payable, but it is obliged to return or pay this part of the property to creditors who have the right to claim it.

Thus, accounts payable have a dual legal nature: as part of the property, it belongs to the enterprise on the right of ownership or even on the right of ownership in relation to the money or things received on loan; as an object of legal obligations, it represents the debts of the enterprise to creditors, that is, persons authorized to claim or recover from the organization the specified part of the property.

In a simplified version, accounts payable is what this company owes to other persons. Taking into account the indicated signs, accounts payable can be defined as a part of the property of an enterprise that is the subject of debt obligations of the debtor organization to eligible persons - creditors arising from various legal grounds, subject to accounting and reflection in the balance sheet as debts of the organization - balance holder.

In cases where the debtor organization does not take any measures to voluntarily repay debts, creditors

still have the possibility of enforcement, which, depending on the nature of the accounts payable, is carried out in court or out of court.

The concept of accounts payable covers the debt obligations of the organization - the debtor, having a different origin.

Since accounts payable is one of the sources of funds at the disposal of the enterprise, it is shown in the liabilities side of the balance sheet. Accounts payable is kept separately for each creditor, and in generalizing indicators they reflect the total amount of accounts payable and give it, breaking it into groups.

The presence of accounts payable is an unfavorable factor for the enterprise, which significantly reduces the performance in assessing the financial condition of the enterprise, solvency and liquidity. Accounts payable arises if the date of receipt of services (goods, works, materials, etc.) does not coincide with the actual date of their payment.

Now we will analyze the assessment of the composition and structure of accounts payable based on the data of JSC *JSC "Uzbekistan Railways"* for 2019/2021.

Table 1

#### Assessment of the composition and structure of accounts payable JSC "Uzbekistan Railways" for 2019/2021<sup>2</sup>

Composition of accounts payable	2019 г.		2020 г.		2021 г.		Change			
	Amount, billion sum	Share, %	Amount, billion sum	Share, %	Amount, billion sum	Share, %	Amount, billion sum		Growth rate, %	
							2019-2020	2020-2021	2019-2020	2020-2021
Short term - total	278,1	36,0	297,0	37,0	286,7	35,0	19,0	-10,3	106,8	96,5
Including: suppliers and contractors	49,6	6,4	52,1	6,5	53,3	6,5	2,5	1,2	105,1	102,3

<sup>1</sup> Арутюнов Ю. А. Финансовый менеджмент: учеб. пособие: рек. УМО Минобразования РФ; изд. 2-е, стер. М.: КНОРУС, 2007–94 с.

<sup>2</sup> Compiled by the author based on the materials of JSC "Uzbekistan Railways" for 2019/2021.

Indebtedness to the staff of the organization	51,3	6,7	49,4	6,2	41,9	5,1	-2,0	-7,4	96,2	85,0
Debt to state off-budget funds	32,7	4,2	31,9	4,0	33,9	4,2	-0,8	2,1	97,6	106,5
Debt on taxes and fees	55,6	7,2	49,3	6,1	42,3	5,2	-6,3	-7,0	88,7	85,8
Other creditors	88,8	11,5	114,3	14,2	115,1	14,1	25,5	0,8	128,7	100,7
Long-term - total	498,6	64	501,6	63	521,6	65	3,0	20,0	100,6	104,0
Total	776,7	100,0	798,7	100,0	808,4	100,0	22,0	9,7	102,8	101,2

Based on this table, it can be concluded that the amount of short-term accounts payable for 2020 compared to 2019 increased by 18,984,504 thousand soums (or by 106.83%) due to an increase of 2,527,630 thousand soums of debt to suppliers and contractors (or by 105.09%) and to other creditors by 25,504,238 thousand soums (or by 128.72%). An increase in settlements with suppliers and contractors could occur as a result of changes in the conditions for the purchase of goods or as a result of an increase in prices for them. According to the analysis, we see a decrease in debt on taxes and fees: in 2020 compared to 2019 by 6,285,281 thousand soums (or 88.70%) and in 2021 compared to

2020 by 6,996 817 thousand soums (or by 85.81%). This indicates a constant change in tax rates. In 2021, accounts payable increased by 9,682,910 thousand soums (or 101.21%) compared to 2020, to a greater extent due to an increase in debt to suppliers and contractors by 1,189,200 thousand soums (or 102.28%).

Thus, the increase in accounts payable in 2019-2021 is normal, but over the period under review, long-term accounts payable increases, which adversely affects the financial condition of the enterprise.

For a more detailed presentation of the calculated data, consider Figures 2.

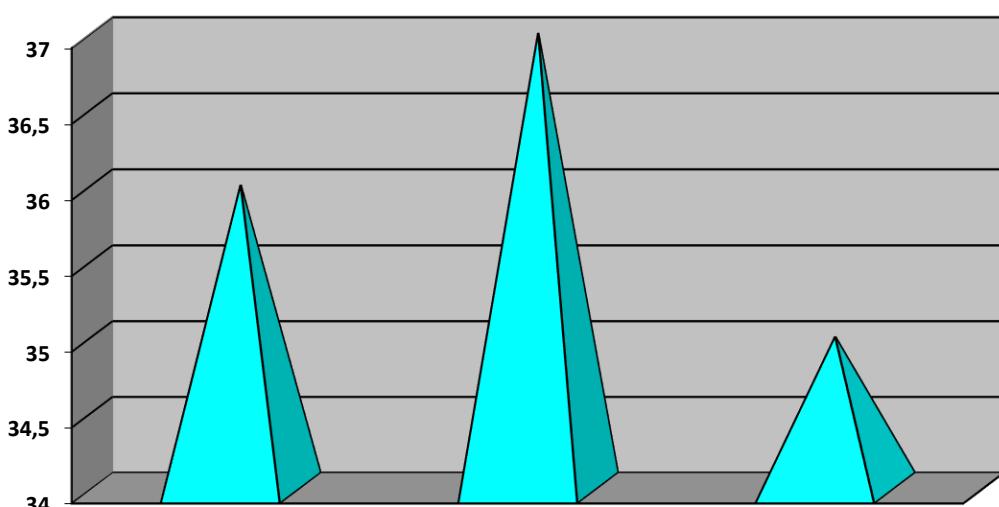


Figure 2. Dynamics of short-term accounts payable of JSC “Uzbekistan Railways” for 2019/2021<sup>3</sup>

In order to reduce this debt to suppliers and contractors, it is possible to propose such measures as structuring accounts payable, in particular for suppliers and contractors, since they occupy a large share in the total debt, as well as offsetting.

Successful work to prevent overdue debts depends on the knowledge of not only each of the methods for solving this problem, but also the order of their application, depending on specific business situations.

For businesses, we can recommend the following proposals for managing accounts payable:

1. It is necessary to solve the problem of not only reducing accounts receivable, but also balancing it with accounts payable. When analyzing the relationship between receivables and payables, it is necessary to analyze the terms of a commercial loan provided to the company by suppliers of raw materials and materials.

2. To ensure the maximization of cash flow, the enterprise should use a wide variety of contract models

<sup>3</sup> Compiled by the author based on the data in Table #3.

with flexible terms of the form of payment. In this case, various options are possible: from prepayment or partial prepayment to transfer for sale and a bank guarantee.

3. It is advisable to conduct a preliminary study of the solvency and reliability of the partner, his credit history, especially when concluding large contracts. However, for this it is necessary to have data banks, knowledge of the methodology and possible methods for assessing the obligation of counterparties. Such work can be performed by special agencies, credit bureaus, banks or analytical services of the enterprises themselves.

4. The search for joint solutions to prevent violations of the terms of contracts in terms of payments is the most rational and civilized way to forestall overdue debts. Thus, business partnerships and cooperation between the seller and the buyer can provide the fastest and most effective solution to problems and reduce overdue debts.

Summing up, it can be noted that the issue of accounts payable management is relevant for any enterprise. With proper debt management and using the above recommendations, the company can significantly improve its financial condition. The main thing is to correctly assess and analyze the state of the enterprise and choose the most suitable methods for yourself.

## References

1. Указ Президента Республики Узбекистан от 7 ноября 1994 года № УП-982 «Об образовании Государственно-акционерной железнодорожной компании «Узбекистон темир йуллари».
2. Аникина Е.С. Теоретические аспекты дебиторской задолженности, её сущность и классификация. Молодой ученый. -2019. С. 193-196.
3. Арутюнов Ю. А. Финансовый менеджмент: учеб. пособие: рек. УМО Минобразования РФ; изд. 2-е, стер. М.: КНОРУС, 2007–311 с.
4. Белкин В. Н. Организационный капитал предприятия / В. Н. Белкин, Н. А. Белкина // Экономика региона. – 2019. – Т. 12. – № 3. – С. 827.
5. Бочаров В.В. Управление денежным оборотом предприятий и корпораций. // Финансы и статистика.2018. -№17. –С. 141-159.
6. Желтухина М.А. Нормативное регулирование учета расчетов с поставщиками и подрядчиками // Молодой ученый. -2015. -№11. –С.837-843.
7. Кожина Е.А. Факторы, влияющие на обрачиваемость дебиторской задолженности // Финансы и кредит. -2017. -№21 (741).
8. Пятов М.Л. Управление обязательствами организации. Финансы и статистика. -2014. -250 с.
9. Данные Акционерного Общества «Ўзбекистон темир йўллари» за 2019/2021 гг.
10. Материалы государственной статистики за 2019/2021 гг.

# JURIDICAL SCIENCES

## КОРПОРАТИВНА ФОРМА ЗДІЙСНЕННЯ ІНОЗЕМНИХ ІНВЕСТИЦІЙ

**Лащихіна В.**

*Кандидат педагогічних наук, доцент*

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна*

*ORCID ID 0000-0002-8192-9932*

**Янішевська З.**

*Кандидат педагогічних наук, доцент*

*Київський національний лінгвістичний університет, Україна*

*ORCID ID 0000-0002-4328-9137*

**Лащихіна І.**

*Магістр права*

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна*

*ORCID ID 0000-0003-0508-7486*

**Семилітко І.**

*Викладач*

*Київський національний лінгвістичний університет, Україна*

## CORPORATE FORM OF FOREIGN INVESTMENT

**Lashchykhina V.,**

*PhD in Pedagogical Sciences, associate professor*

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine*

*ORCID ID 0000-0002-8192-9932*

**Yanishevskaya Z.,**

*PhD in Pedagogical Sciences, associate professor*

*Kyiv National Linguistic University, Ukraine*

*ORCID ID 0000-0002-4328-9137*

**Lashchykhina I.,**

*Master of Laws*

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine*

*ORCID ID 0000-0003-0508-7486*

**Semylitko I.**

*Teacher*

*Kyiv National Linguistic University, Ukraine*

*DOI: [10.5281/zenodo.8019708](https://doi.org/10.5281/zenodo.8019708)*

### **Анотація**

У статті досліджується корпоративна форма здійснення іноземних інвестицій на основі теоретико-правового аналізу щодо особливостей іноземного інвестування; проаналізовано загальні принципи інвестиційної діяльності вітчизняних та іноземних інвесторів; обґрунтовано поняття, ознаки, позитивні та негативні аспекти корпоративної форми здійснення іноземних інвестицій; визначено особливості корпоративної форми інвестиційної діяльності; розглядаються сучасні тенденції ведення міжнародного бізнес-партнерства.

### **Abstract**

The article investigates the corporate form of foreign investment on the basis of a theoretical and legal analysis of the peculiarities of foreign investment; the general principles of investment activities of domestic and foreign investors are analyzed; concepts, signs, positive and negative aspects of the corporate form of making foreign investments are substantiated; the peculiarities of the corporate form of investment activity are determined; current trends in conducting international business partnerships are considered in this research.

**Ключові слова:** корпоративна форма інвестицій, корпоративне інвестування, корпоративне право, господарські/підприємницькі товариства, цінні папери, підприємство-реципієнт, іноземні інвестиції/зовнішні інвестиції, законодавство, інвестиційні відносини, юридична особа, інвестиційна діяльність, господарська діяльність, правове регулювання, зовнішньоекономічна діяльність.

**Keywords:** corporate form of investment, corporate investment, corporate law, business partnerships, securities, recipient enterprise, foreign investments/external investments, legislation, investment relations, legal entity, investment activity, business/economic activity, legal regulation, foreign economic activity.

**Актуальність теми дослідження.** Процеси, які відбуваються у зовнішньому світі свідчать про

те, що в умовах розширення кордонів, якісно наповнена законодавча база та сконцентрована діяльність усіх органів державної влади, що є запорукою для формування та утримання статусу країни з привабливим інвестиційним кліматом на міжнародному рівні. Інвестиційна політика сприяє активному надходженню зовнішнього капіталу в розвиток економіки, а тому є фундаментом для нормального функціонування виробничої діяльності будь-якої розвинутої країни світу.<sup>4</sup>

Необхідно зазначити, що розвитку інвестиційної політики, міжнародному інвестиційному співробітництву та тенденціям у міжнародно-правовій сфері щодо іноземних інвестицій присвячено дослідження як зарубіжних, так і вітчизняних науковців, зокрема праці Бернасконі-Остервалдера Н., Білінської В., Бутузова В., Вакалюка В., Вінник О., Вознесенської Н., Воробйової І., Врублевської К., Гаверського В., Гаврилюка О., Говорушко Т., Даннінга Дж., Дука А., Жюйара П., Жорнокуя Ю., Єгорова А., Карро Д., Кібенка О., Косенко А., Коссака В., Кравців В., Крутіка О., Литвин Я., Лощіхіна О., Лукача І., Маглаперідзе А., Максимчука М., Малютіна О., Маслій В., Марущак А., Мойсеїчукі Д., Нікольської О., Обушної Н., Павленко І., Пересади А., Поєдинок В., Притики Ю., Резнікової В., Сазонця І., Світличної Ю., Сімсона О., Семерака О., Стадницького Ю., Старостюк А., Трапезнікова В., Фархутдінова І., Федорової В., Федоренко В., Чернадчука В., Шевченка А., Шевченка О., Щебрини В. та ін..

Беручи до уваги комплексний вплив міжнародних стимулів, розвиток міжнародно-правової бази щодо іноземних інвестицій, **мета статті** полягає у визначенні особливостей корпоративної форми інвестиційної діяльності, дослідження корпоративної форми здійснення іноземних інвестицій, а саме: поняття, ознаки, її позитивні та негативні аспекти;

**Виклад основних положень.** Нині, основною метою більшості країн світу є підвищення рівня інвестиційної привабливості та збільшення обсягу надходжень зовнішніх ресурсів у національну економіку.

Згідно з чинним законодавством, головними суб'єктами інвестиційних відносин є держава, компанії та приватні особи, кожен з них вправі брати участь в інвестиційному процесі як зі сторони попиту, так і зі сторони пропозиції. Законом України «Про режим іноземного інвестування» та ГК України встановлено форми залучення іноземних інвестицій, що визначають правовий режим такої діяльності, до них належать:

- часткова участі в господарських організаціях корпоративного типу, що створюються спі-

льно з українськими юридичними і фізичними особами, або придбання частки діючих вітчизняних підприємств;

- створення підприємств, яким повністю володіє іноземний інвестор, відокремлених підрозділів та представництв іноземних юридичних осіб, у порядку, передбаченому нормативно-правовими актами України;

- повного придбання у власність діючих національних підприємств;

- не заборонене законами України придбання рухомого чи нерухомого майна; одержання майна та майнових комплексів; купілі акцій, облігацій та інших цінних паперів;

- придбання прав на користування землею та використання природних ресурсів на території України;

- купівлі інших майнових прав;

- в інших не заборонених законодавством України формах.<sup>5</sup>

Враховуючи наведений перелік, виділяють дві основні форми іноземного інвестування:

- корпоративну, що передбачає створення та/або участі в господарській організації;

- договірну, яка характеризується укладенням договорів, що визначають особливості інвестиційних відносин між сторонами.

У цьому підрозділі більш широко розкриємо питання корпоративної форми іноземного інвестування: поняття, ознаки, її позитивні та негативні аспекти.

Нажаль, нормативне закріплення терміну корпоративної форми іноземного інвестування відсутнє, проте науковці-теоретики та юристи-практики пропонують своє визначення даного поняття.

Корпоративна форма іноземного інвестування – це форма вкладення закордонного капіталу в господарську організацію, шляхом її створення та участі у ній з метою одержання соціально-економічного ефекту.

В. М. Бутузов вважає, що корпоративним інвестуванням є кошти, що вкладаються в акції підприємств і в статутні фонди (майно) товариств корпоративного чи унітарного типу та/або участі у такій організації з метою досягнення певного грошового або соціального результату.<sup>6</sup>

Однак, деякі дослідники наголошують на тому, що корпоративне іноземне інвестування має місце, тільки тоді, коли капіталовкладення спрямовуються до статутного капіталу акціонерного товариства або товариства з обмеженою чи додатковою відповідальністю. Розміщення грошових коштів у статутному фонді підприємницьких товариств вже вважається спільної діяльностю. На підтвердження даної думки виступає положення Закону України «Про інститути спільного інвестування» від

<sup>4</sup> Loshchykhin O. Restoration of the trust to law as a recognition of the integrity of the valuable basis of relationship between Ukraine and The European Union: Collective Monograph: Association Agreement: driving integrational changes / O. Loshchykhin, A. Shevchenko, A. Starostyuk, I. Lashchykhina. – Ottawa, Ontario, Canada: Accent Graphics Communications and Publishing. – 2020. – № 3. – P. 171-176.

<sup>5</sup> Про режим іноземного інвестування: закон України від 19.03.1996 р. № 93/96-ВР // Відомості Верховної Ради України. – 1996. – № 19. – Ст. 80.

<sup>6</sup> Бутузов В.М. Правові основи інвестиційної діяльності: навч. посібник / В.М. Бутузов, А.І. Марущак. – К.: КНТ, 2007. – С. 28.

05.07.2012 р. № 5080, де законодавцем чітко визначено форму корпоративних інвестиційних фондів, що можуть існувати виключно у формі акціонерного товариства.<sup>7</sup>

Науковець Ю. М. Жорнокуй характеризує корпоративну форму зовнішнього інвестування як господарську діяльність інвесторів-нерезидентів з об'єднання майнових та інтелектуальних цінностей, що пов'язана з набуттям корпоративних прав та прав власності на цінні папери, які в подальшому розміщують одержані грошові кошти в цінних паперах та корпоративних правах інших суб'єктів.<sup>8</sup>

Більш масштабно поняття «корпоративне інвестування» трактує І. З. Фархутдинов та В. А. Трапезников. Вчені акцентують увагу на важливості форм товариства з обмеженою відповідальністю та акціонерного товариства, як найбільш придатних для залучення вільних грошових коштів, акумулювання значних капіталів та реалізації довготривалих інвестиційних проектів видів господарських товариств. Їх позиція обумовлена тим, що право підприємницьких товариств отримало назву корпоративного права, яке містить єдиний підхід до регулювання господарської діяльності таких самостійних суб'єктів. Виходячи з положень чинного законодавства, засновники самі вправі визначати особливості взаємовідносин між учасниками у частині розподілу одержаних доходів, управління та організації виробничих процесів. На думку науковців, саме з цим поняттям пов'язане використання у світовій літературі терміну «корпоративна форма інвестицій». З огляду на це, під корпоративною формою іноземних інвестицій вони розуміють діяльність закордонних інвесторів, пов'язану із створенням юридичної особи або з їх участю в діючих господарських товариствах приймаючої країни.<sup>9</sup>

Вчений Д. В. Чернадчук також дотримується думки, що найбільш доцільними для залучення іноземних інвестицій є акціонерні товариства та товариства з обмеженою відповідальністю. Саму корпоративну форму іноземних інвестицій вчений розглядає як діяльність зі створення та управління юридичною особою.<sup>10</sup>

З вищезазначенним тлумаченням кореспондує і позиція українського науковця О. М. Вінника, відповідно до якої, корпоративна форма зовнішнього інвестування – це вкладення коштів в акції акціонерних товариств, і в статутні фонди (майно) інших підприємницьких організацій корпоративного типу.<sup>11</sup>

Серед особливостей корпоративного інвестування виділяють:

<sup>7</sup> Про інститути спільного інвестування: закон України від 05.07.2012 р. № 5080-VI // Відомості Верховної Ради України. – 2013. – № 29. – Ст. 337.

<sup>8</sup> Жорнокуй Ю.М. Поняття спільного (корпоративного) інвестування та його ознаки / Ю.М. Жорнокуй // Підприємництво, господарство і право. – 2005. – № 10. – С. 8-11.

<sup>9</sup> Фархутдинов И.З. Инвестиционное право: учеб.-практическое пособие / И.З. Фархутдинов, В.А. Трапезников. – М.: Волтерс Клувер, 2006. – С. 181.

<sup>10</sup> Чернадчук Д.В. Інвестиційне право України: навч. посібник / Д.В. Чернадчук, В.В. Сухонос, Т.О. Чернадчук. – Суми: Унів. Книга, 2009. – С. 116.

- діяльність інвесторів з об'єднання майнових та інтелектуальних цінностей;

- мету об'єднання майнових та інтелектуальних цінностей – отримання дивідендів, набуття прав власності на цінні папери та корпоративних прав;

- емітентів цінних паперів, якими є професійні учасники ринку цінних паперів;

- емісію цінних паперів професійними учасниками ринку цінних паперів, що передбачає об'єднання фінансів інвесторів з подальшим їх розміщенням у цінних паперах та корпоративних правах інших суб'єктів;

- результат у вигляді створення окремої юридичної особи – підприємства з іноземними інвестиціями.<sup>12</sup>

Слід окремо акцентувати увагу на такій означені як мета, що полягає у задоволенні фінансових та соціальних потреб зацікавлених сторін, зокрема в: отриманні прибутку; забезпечені продажу інвестором-засновником власної продукції приймаючого господарського підприємства, через створене ним дочірнє підприємство; координації діяльності підприємств-учасників інвестуючої організації; підвищення рівня конкурентоспроможності виготовленої продукції на внутрішньому та світовому ринках; створенні філій та представництв, які представляють інтереси іноземного інвестора, що дозволяє зекономити кошти, уникнувши використання послуг посередників.

Враховуючи те, що корпоративне інвестування може здійснюватися шляхом: створення господарської організації будь-якого типу, філій, представництва чи участі у функціонуючій господарській організації, – у процесі корпоративного інвестування вкладнику варто зважати на форму власності господарської організації, адже вона визначає його можливості у сфері інвестування. Виокремлюють такі форми власності господарських організацій: державні, комунальні, колективні, приватні та змішані.<sup>13</sup>

Особливу увагу слід приділити підприємствам з іноземними інвестиціями та іноземним підприємствам. Підприємство з іноземними інвестиціями – це господарська організація будь-якої організаційно-правової форми, в статутному фонді якої не менше 10 % становить іноземна інвестиція. Різновидом підприємства з іноземними інвестиціями є іноземне підприємство, що відрізняється наявністю в статутному фонді 100 % іноземної інвестиції. На-

<sup>11</sup> Вінник О.М. Інвестиційне право: навч. посібник / О.М. Вінник. Вид. 2-ге, перероб. та доп. – К.: Алерта; КНТ; ЦУЛ, 2009. – С. 106.

<sup>12</sup> Жорнокуй Ю.М. Вказ. Праця. – С. 11.

<sup>13</sup> Врублевська К.М., Теоретичні засади інституціоналізації інноваційного інвестування в господарському праві / К.М. Врублевська // Теорія і практика правознавства. – Харків. – 2017. – № 1 (11). – С. 1-11. – URL: <http://tlaw.nlu.edu.ua/article/download/104544/100045> (дата звернення: 15.02.2023).

буття спеціального статусу таких підприємств відбувається з дня зарахування зовнішньої інвестиції на баланс відповідної господарської організації.

Корпоративна форма зовнішніх капіталовкладень є доволі різноманітною, це викликає потребує у її класифікації.

Податковим кодексом України передбачено поділ корпоративних вкладень за критерієм об'єкта інвестування на:

1. Портфельне інвестування – придбання нерезидентом цінних паперів, їх похідних та інших фінансових активів за грошові кошти на фондовому ринку або біржовому товарному ринку.<sup>14</sup>

Цей вид інвестицій складає значну частину світового капіталу, адже він: мобільний; часто пов'язаний зі стандартизованими фінансовими інструментами: національною та іноземною валютою, цінними паперами, строковими домовленостями; спрямовується в набір цінних паперів, що утворює «портфель»; не вимагає значних витрат; гарантує отримання високих доходів за короткий часовий проміжок.

Портфельне інвестування характеризується наявністю у іноземного інвестора таких прав як:

- перерахування на банківський поточний рахунок торговця цінними паперами іноземну валюту з-за кордону;

- відкриття інвестиційного рахунку для зарахування іноземної валюти з-за кордону;

- зарахування ввезеної в Україну, у дозволених національним законодавством межах, і задекларовану митним органом під час в'їзду в Україну, готівкову іноземну валюту, що, за наявності митної декларації або документа банку про одержання іноземним інвестором готівкої іноземної валюти, визнається вільно конвертованою, на банківський поточний рахунок фізичної особи-нерезидента;

- перерахування іноземної валюти з банківського поточного рахунку фізичної особи-нерезидента в уповноваженому банку на особистий інвестиційний рахунок або на інвестиційний рахунок закордонного інвестора - юридичної особи;

- перерахування з банківського інвестиційного рахунку іноземної валюти на особистий поточний рахунок торговця цінними паперами;

- перерахування коштів у національній валюті України, одержаних як прибутки (доходи), отримані нерезидентом від інвестиційної діяльності в Україні з інвестиційного рахунку на власний поточний рахунок торговця.<sup>15</sup>

2. Пряме інвестування – полягає у придбанні об'єктів рухомого і нерухомого майна, пов'язаних з ним майнових прав та внесенням коштів і майна до статутного капіталу реципіючої юридичної особи в обмін на корпоративні права, емітовані цією господарською організацією.

Пряме інвестування здійснюється, коли існує конкуренція між великими компаніями, і засновувати нове підприємство немає сенсу. У цьому випадку, потужні монополії купують контрольний пакет акцій вже існуючої організації, що є вигідним для них через притаманні прямому інвестуванню ознаки, до яких відносяться: право управління бізнесом, в обмін на вкладення капіталу у виробництво господарської організації-реципієнта; зміщення господарської організації на внутрішньому та зовнішньому ринках, усунення конкурентів; розширення ринку збуту, через покращення виробничих процесів за рахунок нових правил, тактик та принципів діяльності.<sup>16</sup>

Доцільно зазначити, що підприємство-реципієнт також отримує переваги від такої співпраці, проте тільки тоді, коли цілі обох сторін співпадають. Наприклад, за рахунок запровадження сучасної системи управління та нових технологій, збільшується асортимент виготовлених товарів (робіт, послуг) та їх експорт за кордон.

Деякі науковці в залежності від господарського результату розрізняють наступні види корпоративних іноземних інвестицій:

- портфельні інвестиції – інвестори вкладають гроші в незначні за обсягом пакети акцій чи частки у майні, що за своїм обсягом не перевищують 5% розміру статутного фонду господарської організації корпоративного типу з метою одержання дивідендів;

- фінансові інвестиції – нерезиденти купують значні за розміром пакети акцій або частки у статутному фонді, від 10 % до 40 % статутного фонду, господарських підприємств для перепродажу їх потенційно важливим інвесторам тоді, коли вартість акцій досягає максимального росту;

- стратегічні інвестиції – це фінансові вкладення у придбання контролюваного пакету акцій чи частки у статутному фонді (майні) господарської організації для контролю над ним та одержання базового результату від такої діяльності.<sup>17</sup>

Корпоративна форма заочення іноземних інвестицій має свої переваги та недоліки.

Позитивні аспекти такого інвестування досить значні та полягають у можливості:

- вибору організаційно-правових форм підприємств; партнерів; характеру діяльності та сфер інвестування;

- відокремлення майна іноземного інвестора від майна обраної господарської організації, шляхом її створення та/або участі;

- відокремлення (за окремими винятками) відповідальності інвестора за власними зобов'язаннями від відповідальності створеної ним організації (організації, в яку він вклав інвестиції) за зобов'язаннями такої організації;

- інвестування в ті сфери господарської діяльності, суб'єктом яких може бути лише організація:

<sup>14</sup> Податковий кодекс України: закон України від 02.12.2010 р. № 2755-VI // Відомості Верховної Ради України. – 2011. – № 13-14, № 15-16, № 17. – Ст. 112.

<sup>15</sup> Говорушко Т.А. Сутність прямих іноземних інвестицій та їх класифікація / Т.А. Говорушко, Н.І. Обушна // Теорії мікро-макроекономіки. – 2013. – № 41. – С. 92-95.

<sup>16</sup> Говорушко Т.А. Вказ. праця. – С. 92-95.

<sup>17</sup> Вінник О.М. Вказ. праця. – С. 107.

банківська діяльність, страхова діяльність, професійна діяльність на ринку цінних паперів чи фондовому ринку, біржова діяльність, спільне інвестування тощо;

- залучення грошових коштів інших осіб від випуску емісійних цінних паперів.

Водночас, зазначена форма іноземного інвестування може ускладнювати становище інвестора, через наявність деяких вимог законодавства України, що передбачають:

- створення значного за розміром статутного капіталу чи фонду;

- здійснення нерезидентом на етапі створення та в процесі функціонування господарської організації певних організаційних заходів;

- наявність значного ступеня ризику та обсягу відповідальності у випадку використання або створення повного чи командитного товариства, або у разі здійснення вирішального впливу на господарську організацію, що може стати приводом для субсидіарної відповідальності інвестора – холдингової компанії щодо свого корпоративного підприємства.

**Висновок.** Отже, існують доктринальний та правовий підходи до визначення особливостей корпоративної форми інвестиційної діяльності. Притаманні даній формі ознаки та особливості класифікації, надають іноземному інвестору широкі можливості у виборі організаційно-правових форм здійснення своєї господарської діяльності. Проте, ведення деяких видів такої діяльності може бути обтяжливим для інвестора, а інколи взагалі неможливим. З огляду на це, прийнявши рішення про використання корпоративної форми іноземного інвестування, інвестор-нерезидент має оцінити усі переваги та недоліки господарської організації, яка має використовуватися в процесі інвестування. Сучасна динаміка розвитку інвестиційних відносин вимагає мобільності влади у реагуванні на міжнародні тенденції, що мають супроводжуватися швидким внесенням змін у національне законодавство. Імплементація європейських стандартів корпоративного інвестування допоможе стабілізувати українську сферу господарювання. Тому для вирішення проблем у сфері корпоративного інвестування, необхідно:

1. Визначити на законодавчому рівні поняття «корпоративної форми іноземного інвестування» у такій інтерпретації: – це діяльність іноземних інвесторів, що полягає у створенні та/або в їхній участі в господарській організації, в обмін на корпоративні права та права, посвідчені цінними паперами, з метою одержання соціально-економічного ефекту.

2. Систематизувати положення нормативно-правових актів України з міжнародними стандартами у сфері корпоративного інвестування.

### Список літератури

1. Бутузов В.М. Правові основи інвестиційної діяльності: навч. посібник / В.М. Бутузов, А.І. Марущак. – К.: КНТ, 2007. – 254 с.
2. Вінник О.М. Інвестиційне право: навч. посібник / О.М. Вінник. Вид. 2-ге, перероб. та доп. – К.: Алерта; КНТ; ЦУЛ, 2009. – 614 с.
3. Врублевська К.М., Теоретичні засади інституціоналізації інноваційного інвестування в господарському праві / К.М. Врублевська // Теорія і практика правознавства. – Харків. – 2017. – № 1 (11). – С. 1-11. – URL: <http://tlaw.nlu.edu.ua/article/download/104544/100045> (дата звернення: 15.02.2023).
4. Говорушко Т.А. Сутність прямих іноземних інвестицій та їх класифікація / Т.А. Говорушко, Н.І. Обушна // Теорії мікро-макроекономіки. – 2013. – № 41. – С. 91-99.
5. Жорнокуй Ю.М. Поняття спільного (корпоративного) інвестування та його ознаки / Ю.М. Жорнокуй // Підприємництво, господарство і право. – 2005. – № 10. – С. 8-11.
6. Податковий кодекс України: закон України від 02.12.2010 р. № 2755-VI // Відомості Верховної Ради України. – 2011. – № 13-14, № 15-16, № 17. – Ст. 112.
7. Про інститути спільного інвестування: закон України від 05.07.2012р. № 5080-VI // Відомості Верховної Ради України. – 2013. – № 29. – Ст. 337.
8. Про режим іноземного інвестування: закон України від 19.03.1996 р. № 93/96-ВР // Відомості Верховної Ради України. – 1996. – № 19. – Ст. 80.
9. Фархутдинов И.З. Инвестиционное право: учеб.-практ. пособие / И.З. Фархутдинов, В.А. Трапезников. – М.: Волтерс Клювер, 2006. – С. 181.
10. Чернадчук Д.В. Інвестиційне право України: навч. посібник / Д.В. Чернадчук, В.В. Сухонос, Т.О. Чернадчук. – Суми: Унів. Книга, 2009. – 260 с.
11. Loshchykhin O. Restoration of the trust to law as a recognition of the integrity of the valuable basis of relationship between Ukraine and The European Union: Collective Monograph: Association Agreement: driving integrational changes / O. Loshchykhin, A. Shevchenko, A. Starostyuk, I. Lashchykhina. – Ottawa, Ontario, Canada: Accent Graphics Communications and Publishing. – 2020. – № 3. – P. 171-176.

# MEDICAL SCIENCES

## ENDODONTIC PERIAPICAL LESION: AN OVERVIEW ON THE ETIOLOGY, DIAGNOSIS AND CURRENT TREATMENT MODALITIES

*Loza K.,*

*Associate Professor Department of Dental Surgery*

*ORCID:0000-0001-9671-8049*

*Boitsaniuk S.*

*Associate Professor Department of Dental Therapy*

*ORCID:0000-0001-7742-1346*

*I. Horbachevsky Ternopil National Medical University,  
Ternopil*

*DOI: [10.5281/zenodo.8019711](https://doi.org/10.5281/zenodo.8019711)*

### **Abstract**

Chronic periapical periodontitis (CAP) is a typical oral disease in which periodontal inflammation caused by an odontogenic infection eventually leads to bone loss. Despite substantial progresses of modern endodontics with regards to mechanical instrumentation of radicular spaces, root canal infections, and their associated apical periodontitis lesions remain remarkably prevalent. Knowledge of microbial location, organisation and virulence factors within the root canal system is important for understanding the disease process.

**Keywords:** chronic apical periodontitis, microorganism; nonsurgical endodontic treatment, bone regeneration.

**Introduction.** Apical periodontitis (AP) is one of the most prevalent inflammatory lesions involving the jaw. A recent systematic review revealed that 52 % of the worldwide population and 50 % of the global adult population has at least one tooth with AP, and that the prevalence of AP is much higher among root-filled teeth (39 %) than among nontreated teeth (3 %) [1, 2].

Chronic apical periodontitis refers to the chronic inflammation of periapical tissues due to the long-term presence of infection and pathogenic irritants in the root canal, which is manifested by the formation of inflammation and destruction of alveolar bone. Evidence has reinforced the microbial role in apical periodontitis; AP is essentially an inflammatory disease of microbial aetiology [3].

Microbiota are found in highly organised and complex entities, known as multi-species biofilms mainly located inside the root canal. In specific circumstances, microorganisms can overcome the defence barrier and even establish an extra-radicular infection [4, 5]. Although fungi, archaea and viruses have been found in association with AP, bacteria are the main microbial aetiological agents [3].

It is known that microbial antigens from the root canal infection are capable to stimulate both specific and non-specific immune responses in periapical tissue [6, 7]. This inflammation is characterized by a complex interplay between microbial tissue invasion and host defense [8]. The defense mechanism keeps the microbial infection in the root canal system, thereby preventing its spread beyond the apical foramen, but the permanence of bacteria in the pulpal tissues leads to pulpal pathology and periapical inflammation [9].

### **The main text.**

#### ***Etiologic role of microorganisms in developing of apical periodontitis***

In 1894 W.D. Miller was the first who published observations from the root canals with infected pulp

space, but at that time he was unable to verify his findings [10]. Since that time bacteria was implicated in infections of endodontic origin. In 1982 Fabricius et al. showed the succession of strict anaerobes over facultative anaerobes with time in the root canal, which most likely occurred due to the changes in ecology of root canal system [11, 12].

Precise identification of microorganisms participating in the pathogenesis of apical periodontitis is important in order to understand the disease process and to provide effective antimicrobial treatment.

The oral cavity has one of the highest rates of microorganisms. Under appropriate conditions, the normal oral microbiota may give rise to opportunistic pathogens if access to dental pulp tissues occurs. The most common route of contamination is dental caries, inducing successive inflammatory responses in the pulp tissue, ending with pulp necrosis if appropriate therapeutic measures are not adopted [13, 14, 15]. The enclosed anatomy of the dental pulp provides an effective primary barrier against its microbial colonization, once the teeth are part of the oral cavity.

Microorganisms residing in the root canal play an essential role in the initiation and establishment of periradicular lesions [16]. Microorganisms may cause direct tissue damage and modulate the immunological response by secretion of products, including enzymes, exotoxins and metabolic end-products [17, 18, 19].

#### ***Current Challenges in the Diagnosis and Treatment of Apical Periodontitis***

Since its inception, conventional radiography has remained the mainstay of imaging in Endodontics. Among the specific imaging techniques, which have been researched as potential diagnostic and treatment planning tools in Endodontics, are digital subtraction radiology (DSR), tuned aperture computed tomography (TACT), ultrasound (US), magnetic resonance imaging (MRI) and computed tomography (CT) [20, 21].

As such, conventional radiography, despite its inherent limitations (Compression of Three-Dimensional Structures, Geometric Distortion), remains the default imaging system in the field.

Cone beam computed tomography (CBCT) is a contemporary, three-dimensional, diagnostic imaging system designed specifically for use on the maxillofacial skeleton [22, 23]. A commonly used option is for the images of the area of interest to be displayed, simultaneously, in the three orthogonal planes (axial, sagittal and coronal), affording the clinician a truly three-dimensional view of the area of interest. Cone beam computed tomography overcomes the limitations of conventional radiography. The production of three-dimensional images allows a comprehensive appreciation of the anatomy, and its spatial relationship to the tissue destruction caused by the pathosis under examination. Cone beam computed tomography is significantly more sensitive than conventional radiography in the detection of apical periodontitis in humans [24]. Periapical bone destruction associated with endodontic infection can be identified using CBCT before evidence of the existence of these lesions presents itself on conventional radiographs [25, 26].

#### ***Challenges in the Treatment of Apical Periodontitis***

Endodontic success has largely been based on three basic principles known as the "endodontic triad of success" which includes: cleaning (debridement and disinfection), shaping, and obturation (sealing) [27]. The goal of endodontic treatment is to clean, shape, and seal the root canal system in three dimensions to eliminate or prevent (re)infection. Treatment aims to remove or significantly reduce the intracanal microbes and prevent re-infection by placing a root canal filling. When endodontic treatment is adequately done, the periapical lesion heals with hard tissue regeneration, which is evident in follow-up radiographs through a reduction in the radiolucency's size [28].

Various clinical approaches involving nonsurgical endodontic treatment for the treatment of AP have been developed. Given the variability and complexity of the internal anatomy of teeth, which includes C-shaped root canals, curvatures, and lateral and apical ramifications, complete disinfection of contaminated root canals is difficult because of underlying pulp necrosis [29].

Irrigation, a key factor in the success of endodontic treatment, has several important functions depending on the irrigant used; these include destruction of the microorganisms in the root canal, dissolution of necrotic and inflamed tissue, removal of dentinal debris, prevention of bacterial extrusion into the periapical tissues, reduction of friction, improvement of the cutting effectiveness, and cooling of the endodontic file and tooth. Importantly, it affects areas of the root canal wall that are not accessible by mechanical instrumentation. Sodium hypochlorite, because of its specific ability to dissolve organic matter, is widely considered the primary irrigant of choice to effectively kill and remove bacteria and necrotic tissue remnants in the canal [1, 30, 31].

Antimicrobial therapy in endodontics has been established on the opinion that periradicular conditions are infectious entities. Such therapies should be able to eliminate pathogenic microorganisms; in this context, highly effective antimicrobial strategies should be applied to achieve optimal outcomes [32, 33].

#### **Bone remodeling of AP**

Bone remodeling is performed by altering bone resorption and formation in chronological order. Bone resorption and formation are opposing and coupled processes of osteoblasts and osteoclasts [34, 35], which together constitute normal bone mass. This section focuses on several factors that influence periapical bone remodeling, including microorganisms, human signaling pathways, and the immune system.

#### **Conclusions.**

The worldwide prevalence of apical periodontitis is high, and its treatment remains challenging. Improvement in endodontic instruments, instrumentation systems, irrigants, and ICM, along with the development of novel therapeutic approaches, are crucial for more effective procedures for treating infected root canals. Nonsurgical and surgical endodontic treatments have a high success rate in the treatment and prevention of apical periodontitis when carried out according to standard and accepted clinical principles.

#### **Conflicts of Interest**

The authors declare no conflict of interest.

#### **References**

1. Arias Z, Nizami MZI, Chen X, Chai X, Xu B, Kuang C, Omori K, Takashiba S. Recent Advances in Apical Periodontitis Treatment: A Narrative Review. Bioengineering. 2023; 10(4):488. <https://doi.org/10.3390/bioengineering10040488>
2. Tibúrcio-Machado CS, Michelon C, Zanatta FB, Gomes MS, Marin JA, Bier CA. The global prevalence of apical periodontitis: a systematic review and meta-analysis. Int Endod J. 2021;54(5):712-735. doi:10.1111/iej.13467
3. Braz-Silva PH, Bergamini ML, Mardegan AP, De Rosa CS, Hasseus B, Jonasson P. Inflammatory profile of chronic apical periodontitis: a literature review. Acta Odontol Scand. 2019;77(3):173-180. doi:10.1080/00016357.2018.1521005
4. Sunde PT, Tronstad L, Eribe ER, Lind PO, Olsen I. Assessment of periradicular microbiota by DNA-DNA hybridization. Endod Dent Traumatol. 2000;16(5):191-196. doi:10.1034/j.1600-9657.2000.016005191.x
5. Nair PN. On the causes of persistent apical periodontitis: a review. Int Endod J. 2006;39(4):249-281. doi:10.1111/j.1365-2591.2006.01099.x
6. Colić M, Gazivoda D, Vučević D, Vasiljić S, Rudolf R, Lukić A. Proinflammatory and immunoregulatory mechanisms in periapical lesions. Mol Immunol. 2009;47(1):101-113. doi:10.1016/j.molimm.2009.01.011
7. Kawashima N, Stashenko P. Expression of bone-resorptive and regulatory cytokines in murine periapical inflammation. Arch Oral Biol. 1999;44(1):55-66. doi:10.1016/s0003-9969(98)00094-6

8. Hahn CL, Liewehr FR. Innate immune responses of the dental pulp to caries. *J Endod.* 2007;33(6):643-651. doi:10.1016/j.joen.2007.01.001
9. Kakehashi S, Stanley HR, Fitzgerald RJ. The effects of surgical exposures of dental pulps in germ-free and conventional laboratory rats. *Oral Surg Oral Med Oral Pathol.* 1965;20:340-349. doi:10.1016/0030-4220(65)90166-0
10. Miller WD. An introduction to the study of the bacteriopathology of the dental pulp. *Dent Cosmos* 1894;36:505-27.
11. Fabricius L, Dahlén G, Ohman AE, Möller AJ. Predominant indigenous oral bacteria isolated from infected root canals after varied times of closure. *Scand J Dent Res.* 1982;90(2):134-144. doi:10.1111/j.1600-0722.1982.tb01536.x
12. Peciuliene V, Maneliene R, Balcikonyte E, Drukteinis S, Rutkunas V. Microorganisms in root canal infections: a review. *Stomatologija.* 2008;10(1):4-9.
13. Gomes BPFA, Herrera DR. Etiologic role of root canal infection in apical periodontitis and its relationship with clinical symptomatology. *Braz Oral Res.* 2018;32(suppl 1):e69. Published 2018 Oct 18. doi:10.1590/1807-3107bor-2018.vol32.0069
14. Aas JA, Paster BJ, Stokes LN, Olsen I, Dewhirst FE. Defining the normal bacterial flora of the oral cavity. *J Clin Microbiol.* 2005 Nov;43(11):5721-32. <https://doi.org/10.1128/JCM.43.11.5721-5732.2005>
15. Smith AJ. Pulpal responses to caries and dental repair. *Caries Res.* 2002 Jul-Aug;36(4):223-32. <https://doi.org/10.1159/000063930>
16. Karamifar K, Tondari A, Saghiri MA. Endodontic Periapical Lesion: An Overview on the Etiology, Diagnosis and Current Treatment Modalities. *Eur Endod J.* 2020;5(2):54-67. Published 2020 Jul 14. doi:10.14744/eej.2020.42714
17. Siqueira JF Jr. Endodontic infections: concepts, paradigms, and perspectives. *Oral Surg Oral Med Oral Pathol Oral Radiol Endod.* 2002;94(3):281-293. doi:10.1067/moe.2002.126163
18. Henderson B, Poole S, Wilson M. Bacterial modulins: a novel class of virulence factors which cause host tissue pathology by inducing cytokine synthesis. *Microbiol Rev.* 1996;60(2):316-341. doi:10.1128/mr.60.2.316-341.1996
19. Takahama A Jr, Rôças IN, Faustino ISP, et al. Association between bacteria occurring in the apical canal system and expression of bone-resorbing mediators and matrix metalloproteinases in apical periodontitis. *Int Endod J.* 2018;51(7):738-746. doi:10.1111/iej.12895
20. Patel S, Dawood A, Whaites E, Pitt Ford T. New dimensions in endodontic imaging: part 1. Conventional and alternative radiographic systems. *Int Endod J.* 2009;42(6):447-462. doi:10.1111/j.1365-2591.2008.01530.x
21. Durack C, Patel S. Cone beam computed tomography in endodontics. *Braz Dent J.* 2012;23(3):179-191. doi:10.1590/s0103-64402012000300001
22. Arai Y, Tammisalo E, Iwai K, Hashimoto K, Shinoda K. Development of a compact computed tomographic apparatus for dental use. *Dentomaxillofac Radiol.* 1999;28(4):245-248. doi:10.1038/sj/dmfr/4600448
23. Mozzo P, Procacci C, Tacconi A, Martini PT, Andreis IA. A new volumetric CT machine for dental imaging based on the cone-beam technique: preliminary results. *Eur Radiol.* 1998;8(9):1558-1564. doi:10.1007/s003300050586
24. Estrela C, Bueno MR, Leles CR, Azevedo B, Azevedo JR. Accuracy of cone beam computed tomography and panoramic and periapical radiography for detection of apical periodontitis. *J Endod.* 2008;34(3):273-279. doi:10.1016/j.joen.2007.11.023
25. de Paula-Silva FW, Santamaría M Jr, Leonardo MR, Consolaro A, da Silva LA. Cone-beam computerized tomographic, radiographic, and histologic evaluation of periapical repair in dogs' post-endodontic treatment. *Oral Surg Oral Med Oral Pathol Oral Radiol Endod.* 2009;108(5):796-805. doi:10.1016/j.tripleo.2009.06.016
26. Garcia de Paula-Silva FW, Hassan B, Bezerra da Silva LA, Leonardo MR, Wu MK. Outcome of root canal treatment in dogs determined by periapical radiography and cone-beam computed tomography scans. *J Endod.* 2009;35(5):723-726. doi:10.1016/j.joen.2009.01.023
27. Ingle JI. A standardized endodontic technique utilizing newly designed instruments and filling materials. *Oral Surg Oral Med Oral Pathol.* 1961;14:83-91. doi:10.1016/0030-4220(61)90477-7
28. Blake A, Tuttle T, McKinney R. Apical Periodontitis. In: StatPearls. Treasure Island (FL): StatPearls Publishing; January 10, 2023.
29. Siqueira Junior, J.F.; Rôças, I.D.N.; Marcellano-Alves, M.F.; Pérez, A.R.; Ricucci, D. Unprepared root canal surface areas: Causes, clinical implications, and therapeutic strategies. *Braz. Oral. Res.* 2018, 32, e65.
30. Haapasalo, M.; Shen, Y.; Wang, Z.; Gao, Y. Irrigation in endodontics. *Br. Dent. J.* 2014, 216, 299–303.
31. Boutsoukis C, Lambrianidis T, Kastrinakis E. Irrigant flow within a prepared root canal using various flow rates: a Computational Fluid Dynamics study. *Int Endod J.* 2009;42(2):144-155. doi:10.1111/j.1365-2591.2008.01503.x
32. Sato I, Ando-Kurihara N, Kota K, Iwaku M, Hoshino E. Sterilization of infected root-canal dentine by topical application of a mixture of ciprofloxacin, metronidazole and minocycline in situ. *Int Endod J.* 1996;29(2):118-124. doi:10.1111/j.1365-2591.1996.tb01172.x
33. Iwaku M, Hoshino E, Kota K. How to conserve infected pulps. Tokyo, Japan: Nihon-Shika-Hyoron; 1996. Lesion sterilization and tissue repair (LSTR) therapy: new pulpal treatment.
34. Luo X, Wan Q, Cheng L, Xu R. Mechanisms of bone remodeling and therapeutic strategies in chronic apical periodontitis. *Front Cell Infect Microbiol.* 2022;12:908859. Published 2022 Jul 22. doi:10.3389/fcimb.2022.908859

# PHILOLOGICAL SCIENCES

## THE MAIN FEATURES OF PHONOTACTICS IN THE AZERBAIJANI AND ENGLISH LANGUAGES

*Alirzayeva K.*

*Department of English Phonetics, Azerbaijan University of Languages,  
Baku, Azerbaijan*

DOI: [10.5281/zenodo.8019715](https://doi.org/10.5281/zenodo.8019715)

### **Abstract**

The article has been written on the bases of comparative-tyological method in the study of the English and Azerbaijani languages belonging to different language systems (English belonging to analytical type of languages, Azerbaijani to the synthetic type of languages. The main aim of the investigation is to find out similarities and differentiations between phonotactics in the English and Azerbaijani languages.

**Keywords:** phonotactics, monophthong, diphthong, consonant, excursion phase, recursion stage.

**Introduction.** The etymology of the word “phonotactics” comes from the Greek word “phone”, “sound” and “taktike” “the art of placement”. Speaking of phonotactics, we mean a combination of phonemes in different positions in a word and a morpheme. Phonotactic restrictions investigate all possible sequences of phonemes in a language. A syllable is a phonotactic unit. The rules that form the basis of the syllable structure that exists in each language, and the rules regulating them, are called phonotactic restrictions.

In English, there are phonotactic rules that reveal which combinations of phonemes are permissible or not permissible at the junction of syllables. Despite the fact that, in the initial position, the combination of such consonants as (sk, st, sp) is often used, but combinations of the same phonemes, in the combinations (ps, pt, ks) are not used in the initial position in English words. Speaking about the phonotactic possibilities of the English language, the following features can be noted: long monophthongs and diphthongs in the English language cannot precede the consonant sound / ŋ /; nasal sonant / ŋ / is not used in the initial position; it is not possible to combine such phonemes as / tʃ, dʒ, ð, z / with consonants in the initial position; phonemes / r, j, w / cannot act as the first element in combinations with consonants; vowel phonemes such as / e, æ, ʌ, ɒ / are not found in the final position. Phoneme / r / is characterized by rotacism, the absence of rotacism, the use of intrusive and linking / r /. In the words with the letter “r, the rotic / r / is used. This phenomenon occurs in American English. The absence of rotatism occurs in British English. If the word ends with the letter “r”, and the following word begins with a vowel, in this case linking / r / is used . For example: His father and mother are engineers. Intrusive / r / is used even if the word ends in a vowel, and the following word begins with a vowel. For example: The idea of Africa and Asia. The combination of such phonemes as / fs, mh, stl, spw / in the initial position is unknown. Consonant phonemes such as / h, j, r, w / are not found in the final position in the English language. If in the final position such sonants as / m, n / do not form a syllable, then in this case the sonorous sound / l / may precede them. In the final position, the combination of phonemes such as / kf, ʃp, lð, ʒbd / is unknown. The combination of consonant phonemes like [tw, dw, gw] before vowels can be used

at the beginning of a word; the twomembered combination of the consonant [sp] in the initial position may occur before all vowels; from the twelve possible three-membered combinations of consonants, nine of them can be used in English, but such threemembered combinations as [spw-, stl-, stw-] in the final position are not used. [5, c 243].

### **2. Scope of the study**

Words in a language have a certain phonetic composition, structure. There is no word in the language that has no phonetic content: each word combines at least three aspects - a sound complex, a meaning, and a source of meaning. To be a language unit of any sound complex, the combination of sounds in each language must be organized in accordance with certain phonetic laws, phonetic rules. For example, in English, if there are three consonants at the beginning of the word, such combinations of consonants in the Azerbaijani language are not allowed. On the other hand, the words cannot begin with the combination of consonants [tn, tl], but these combinations can be used in the final position of the words in English. In the Türkic languages, vowels in the composition of the word have the same features. In the composition of one word, it is possible to combine either front vowels or back vowels.

In English, not all consonants at the beginning of the word can be combined with each other. In this position we can show the two-structured form of the twomembered combination of consonants. For example, 1) Spirant + consonant (S + C). For example, stay [s t e i], swim [s w ɪ m], sleep [s ɪ i: p]. 2) Consonant + [w, r, l, j]: twin [t w ɪ n], cream [k r i: m], plain [p l e i n], beauty [b j u: t i] [5, p.243]. From the two modular structures, it can be concluded that the occlusive plosives, in combination constrictive sonorants in the initial position can form a two-membered combination. Such a structure as a spirant + occlusive is in the second place. However, two-membered combinations such as [sr, sb, sh, tl, hr, fw] are beyond the limit of the types of noted structures. On the other hand, it is possible to determine three types of structure of a twomembered combination in anlaut. On the other hand, at the beginning of a word, three types of twomembered consonant combinations can be defined: 1) occlusive plosives + sonorant, 2).fricative + sonorant, 3) fricative + fortis (voiceless) stop (Gimson,1970).

In the final position of the twomembered combination, five models can be distinguished: 1) consonant + / t, d, s, z / For example, begged, since, act, helped. 2) sonorant + consonant For example, help, sold. 3) / m, n, / + consonant For example, ink, lung. 4) consonant + interdental / θ / For example, fifths, length. 5) / r / + consonant For example, work, birth. According to A. Jimson, such consonants as [r, h, j, w] in English in the final position cannot form combinations with other consonants; consonants such as [g, ɣ, δ] in twomembered consonant combinations cannot act as the last element; the combination [pθ] only with [e], the combination [mθ] only with [ɔ:], the combination [ln] only with [e], [fθ] with [i] can be used after all vowels; only the combination [dz] can be used after all vowels; vowels such as [i, e, ʌ] have a greater tendency in the formation of a combination of vowels with consonants. In English, all consonants can be found in the initial position in the words. This combination is found in proper nouns of foreign origin. For example, Ngami / ɳə: mi / (Gimson, 1970).

### **3. Research Methodology**

In the article we have used comparative typological method in the investigation of the main features of phonotactics in the Azerbaijani and English languages

### **4. The main features of phonotactics in the Azerbaijani and English languages**

According to the phonotactics of the Azerbaijani language, two vowels or two consonants cannot be combined at the beginning of a word. In addition, there are several sound combinations, such as [ggcaa], [ioac], [mnfra] and so on. Typical sound combinations can never be a part of the phonetic structure in Azerbaijani words (Axundov, 1973). Therefore, the sound content of each language is formed on the basis of specific phonetic laws and rules, and function in a language. Regarding to the distribution of vowels in the structure of the word in the Azerbaijani language, A. Akhundov notes the followings: 1) The most typical position for Azerbaijani vowels is the middle position. 2) The combination of two vowels at the beginning of a word and five vowels at the end of a word is not used. Vowels such as [e, ö, o] are not typical for the final position. For the final position, six vowels are typical such as [i, ü, ə, ı, u, a]. 3) In the Azerbaijani language, regardless of the phonetic and morphological position, the most common are non-labialized, open vowels such as [ə] and [a]. 4) The most widely used long vowels in the Azerbaijani language are [i:] and [a:]. 5) The frequency of use in the Azerbaijani language is indicated as follows: [a, a, i, i, u, u, e, ö; a:, i:, e:, o:] (Axundov, 1984). There are certain limitations in the development of vowel phonemes in combinations of VC and CV in the Azerbaijani language. A. Akhundov's research shows that all vowel phonemes cannot be used before all consonants. It is revealed that when vowel sound [ö:] is used less before consonants, and the most commonly used vowel sounds are [i:], [u:], [a:]. As in the case of VC, there are some limitations in the combination of vowel phonemes after various consonants (CV). In this type of combination, a vowel phoneme such as [ö:] is less used after various consonants (Axundov, 1984).

In the Azerbaijani language, there is a serious limitation in the combination of vowels if they are joined. All vowel sounds cannot be used at the junction of words. Akhundov's research shows that there are two strict phonetic rules in the development of various variants of the Azerbaijani language. The first of them is manifested in short variations of closed vowels, and the second - in a slightly decreasing labialization of the lips. Closed vowels in the Azerbaijani language are reduced in different phonetic positions. If the number of syllables increases, then in this case closed vowels that stand before unstressed syllables are reduced. Thus, the closed syllable is reduced: 1) words consisting of two syllables on the first unstressed syllable; 2) words consisting of three syllables on the second unstressed syllable; 3) in four-syllable words on the third unstressed syllable; 4) and in the words of five syllables on the fourth unstressed syllable. For example, sinif, sinfi, sinfimizin; bulud, buludun, buludunuz. But in monosyllabic words, closed vowels are not reduced. For example, biz, gül, qız, quş (Axundov, 1984). Speaking about the physical-acoustic features of phonetic components, their phases, A. Akhundov shows the following common features for the consonants of the Azerbaijani language: 1) the excursion phase for all voiced consonants at the beginning of the word leads to devoicing; 2) the recursion stage of all consonants at the end of a word leads to devoicing; 3) the excursion phase of all voiceless consonants after vowels leads to a slight voicing; 4) all consonant phonemes are labialized depending on the phonetic position in which they fall; (Axundov, 1984). In Azeri, occlusive plosive voiceless consonants such as [p, t, k, k] in all positions of the structure of the word may have such a characteristic feature as aspiration. Aspiration in the Azerbaijani language is most characteristic for the final position. All aspirated consonants lose aspiration after consonant [s]. At the same time, A. Akhundov notes that at the end of complex words, voiced consonants are aspirated in some cases (Axundov, 1984).

The distributional features of the consonants of the Azerbaijani language can be summarized as follows: 1) Like the vowels, the most typical position for consonants is the middle position. In the Azerbaijani language, at the beginning of the word, the phoneme [g] is not used. At the end of the word noisy consonants are used more than sonorous consonants. In the initial and middle positions, lingual, occlusive, voiced, noisy and oral consonants are used more frequently. The same consonants are characteristic for the initial position (Axundov, 1984). Fricative, voiceless and oral consonants are more often used in the root of the word than in the suffixes in the Azerbaijani language. As a rule, lingual, occlusive, voiced, noisy, oral consonants are more characteristic for the root of a word. Sonorous consonants are more characteristic of suffixes. Consonants in frequency of use in the Azerbaijani language are listed as follows: [l, n, r, m, d, y, s, b, t, k, z, g, g, k, x, h, v, c, k, f, n, j] (Axundov, 1984). Regarding the ability to connect consonants with vowels and consonants in the Azerbaijani language, the following can be mentioned: 1) Only [b] cannot be combined with another consonant in the Azerbaijani language. If we take

into consideration [m, d, r] and [n], all consonants can be used at the junction of words, but [l] can be used together with [j] on the border with the morpheme. [d] can be used with such consonants as [p, f, t, ç, k, g, x] (Axundov, 1988). There are no restrictions on the consonants of the Azerbaijani language before the vowels. Only consonants [v, j, k, g] and [ğ] cannot be used before all vowels in a given language. Thus, [v] is not used before [ö], and [k] is not used before [i], [j], [g] and [ğ] before the four consonants [3, p.145]. According to F. Jalilov, the modern [ŋ] phoneme in modern Azerbaijani language is not functioning any longer, and the allophone [ü] which is formed from the phoneme [ý] and [k] is more activated. Thus, in such words as [inəü, çörəü] or [inəx, çörəx], a deaf allophone of the [y] phoneme is used. This allophone we indicate in transcription as follows, as [ü] or [x]. In the Azerbaijani language, the allophone of the constrictive consonant [k] is noted as [ü]. For example, məktəb, məktub [məütəp, məütup] [4, p. 64-65].

Speaking about the connections of consonants in the initial and final positions in the Azerbaijani language, F. Jalilov notes that two vowels, two consonants are not used, in this position the phonemes like [r], [j] do not occur, the consonants [l], [m], [n], [z], [v] are less found in the above position, and delving into the ancient era, we reveal that they were not used in this position. In the middle and final position, two vowels are not found. In the Azerbaijani language, if two consonants are found in the final position, then one of them is usually a sonorous sound. There are some differences between phonotactics of words and suffixes in the Azerbaijani language. Thus, such consonants as [l, n, r, ɳ] are not found in the initial position of the word, but most of the morphemes begin with the given phonemes. On the other hand, all vowels are used in the root of the word, but in suffixes vowel phonemes such as [e, o, ə] are not found. As F. Jalilov notes that, the combination of two or three consonants in the Azerbaijani language

from the point of view of the diachronic aspect is a subsequent phenomenon, because such combinations of qırıq-qırıq, köküs-köks, görülü-görülü appeared in the morphological connection (Cəlilov, 1988).

F. Veyselli notes that the Azerbaijani language is a language that adheres to the rules of VC or CV. The subtlety of the Azerbaijani language is that in the nest of one vowel several vowel sounds cannot be combined. Further he writes: "The second feature that distinguishes our language from other languages is that the characteristic feature of our words is that they are always at their peak. In Azerbaijani, the first root vowel is characterized by the fact that the subsequent vowel in the suffix acquires the same feature. For example, if words begin with front-vowels, then the front-vowel is also used in suffixes or vice versa, for example, ata-lardan, iki-miz-in.

**Conclusion.** Comparative -typological analysis of the materials of the English and Azerbaijani languages helps us to come to the following conclusions. Studies show that English and Azerbaijani languages have their own phonotactic features.

### References

1. Axundov A.A. Azrbaycan dilinin fonemlər sistemi, Bakı, "Maarif", 1973.
2. Axundov A.A. Azərbaycan dilinin fonetikası. Bakı, Maarif 1984.
3. Axundov A.A. Ümumi dilçilik. Bakı "Maarif" 1988.
4. Cəlilov F.A. Azərbaycan dilinin morfonologiyası. Bakı, Maarif, 1988.
5. Gimson A.G. An Introduction to the Pronunciation of English. London 1970
6. Roach P. English phonetics and phonology. Cambridge University Press, 2002.
7. Torsuev G. P. Questions of the phonetic structure of the word (on the material of the English language) M., -L, Publishing House An An USSR of 1962.

# PHYSICS AND MATHEMATICS

## RADIATION CONDITION FOR THE 3-DIMENSIONAL HELMHOLTZ EQUATION ON THE BOUNDARY OF A BOUNDED DOMAIN

*Gorin V.*

DOI: [10.5281/zenodo.8019719](https://doi.org/10.5281/zenodo.8019719)

### Abstract

In the formulation of the problem of scattering of monochromatic waves and the numerical simulation of the solution to the Helmholtz equation, there is a computational inconvenience: the calculation is performed on a finite grid of discretization nodes of the finite scattering region, while the radiation conditions for the scattered wave are formulated at the infinitely distant boundary. Overcoming this inconvenience leads to a new type of boundary condition: a nonlocal boundary condition (or condition of the 4th kind).

**Keywords:** non-reflecting boundary conditions, boundary value problem, Helmholtz equation, Dirichlet to Neumann map, integro-differential operator.

**AMS subject classifications:** 65-02; 31C20; 65N99; 76M25

**MSC2020:** 35J05; 35J15; 35J25

**1. Introduction.** The main types of setting boundary value problems for equations of mathematical physics of elliptic type are well known [1-4]: these are 1) 1st boundary value problem with Dirichlet conditions – boundary condition of the 1st kind (the value of the desired function is set on the boundary of the solution domain); 2) the 2nd boundary value problem with the Neumann conditions - the boundary condition of the 2nd kind (the normal derivative of the desired function is set on the boundary); 3) The 3rd boundary value problem with Robin conditions is a boundary condition of the 3rd kind (a linear combination of the required function and its normal derivative is specified on the boundary).

All these types of conditions are linear and local (when formulating, the values of the desired function and/or its normal derivative at each point of the boundary are used separately). It should be noted that if the property of linearity of boundary conditions for linear problems is natural, then the locality of boundary conditions for fields in distributed systems is not due to anything, and is only a tradition of the historical development of problem formulations.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(x, y, z) \right) u = f(x, y, z). \quad (2.1)$$

Let  $f(x, y, z)$  has a bounded in the  $\mathbb{R}^3$  support, which lies completely inside a closed ball  $O_1$ :  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R_1^2$  with a radius  $R_1$  and a center in the origin. The parameter  $k = k(x, y, z)$  has a positive constant value in the ball exterior, which is equal to  $k_0$ .

Thus, in the ball  $O_1$  exterior, the solution  $u = u(x, y, z)$  satisfies the uniform Helmholtz equation with constant coefficients. The Sommerfeld radiation conditions define the solution behavior in the infinity, namely [10]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &\sim O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 u &\sim o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Under conditions (2.1), (2.2) the solution of the problem in the ball  $O_1$  exterior is defined *uniquely* by the boundary condition in the ball  $O_1$  surface, or in the surface of a ball, which includes  $O_1$  inside, because a zero boundary condition gives everywhere a zero solution in the ball  $O_1$  exterior (see [11] pp. 440 – 441).

However, when setting computational boundary value problems, one has to perform calculations in a *finite* region of space, and the use of conditions (2.2) at infinity causes difficulties. So,

Non-local boundary conditions arise in a situation where a certain system of bodies is surrounded by boundless space, and it is required to solve the boundary value problem in conditional finite boundaries in such manner that the solution would not be spoiled by these boundaries, and within the computational domain would coincide with the solution for boundless space. In the literature, such a problem is called the problem of constructing non-reflecting boundary conditions, and is widely studied for acoustics, hydromechanics, and scattering of waves of various nature [5–9].

The specific example of a problem with the Helmholtz equation proposed below is not new (A.A. Konstantinov and others, [8], J.B. Keller [9]). However, the solution of the problem there was done formally: in the form of a series, which turned out to be divergent and unsuitable for use in calculations. This work brings the solution to the proper form.

**2. Statement of the problem.** Consider the non-uniform Helmholtz equation in  $\mathbb{R}^3$ :

*Required:* to find an expression for the radiation condition *on the boundary of a limited area* (namely, here - on the boundary of the ball  $O$ :  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ ,  $R > R_1$  of radius  $R$ , which contains the region of inhomogeneity of the original problem inside itself).

**3. Solving.** Let's move from Cartesian coordinates to spherical coordinates:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (3.1)$$

Equation (2.1) is rewritten in the form<sup>18</sup>:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Lambda + k^2 \right) u = f, \quad (3.2)$$

Here the angular part of the 3-dimensional Laplace operator is introduced

$$\Lambda = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (3.3)$$

Outside the ball  $O_1$ , the solution satisfies the homogeneous equation

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Lambda + k_0^2 \right) u = 0, \quad (3.4)$$

When the radiation conditions (2.2) are satisfied, it is represented as a series (see [4], p. 448):

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{c_{nm}}{\sqrt{k_0 r}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 r) Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (3.5)$$

Here  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  are the spherical functions [12-14]<sup>19</sup>. They are orthonormal [15]:

$$\oint d^2 o Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (3.6)$$

Spherical functions form a complete basis on a sphere in space  $L_2(S^2)$  (see [16], [17]).

$H_v^{(1)}(z), H_v^{(2)}(z)$  are the Hankel functions of the 1-st and 2-nd kind. They have asymptotic behavior at infinity [18]:

$$H_v^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left( i \left( z - v \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right), \quad |z| \rightarrow \infty; \quad (3.7)$$

$$H_v^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left( -i \left( z - v \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

From (3.7) follows the asymptotic behavior of (3.5) at large distances

$$u(r, \theta, \varphi) \sim \sqrt{\frac{2 e^{ik_0 r}}{\pi i k_0 r}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm} (-i)^n Y_{nm}(\theta, \varphi), \quad k_0 r \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

On the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  from the obtained formulas we have:

$$u(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{k_0 R}} \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 R) \sum_{m=-n}^n c_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (3.10)$$

Using the formula (see [19] for the half-sum of formulas (5.6.3))

$$\frac{d}{dz} H_v^{(1)}(z) = H_{v-1}^{(1)}(z) - \frac{v}{z} H_v^{(1)}(z) \quad (3.11)$$

for the normal derivative of  $u$  on the sphere, we get:

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{k_0 R}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{H_{n-\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 R)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 R)} - \frac{(n+1)}{k_0 R} \right) H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 R) \sum_{m=-n}^n c_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (3.12)$$

Let us now construct an expression for the normal derivative of  $u$  expressed in terms of the function  $u$  itself on the boundary. To do this, using the orthogonality of spherical functions (3.6), we express  $c_{nm}$  from (3.10) and substitute into (3.12):

$$c_{nm} = \frac{\sqrt{k_0 R}}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 R)} \iint d^2 o' Y_{nm}^*(\theta', \varphi') u(R, \theta', \varphi'), \\ n = 0, 1, \dots \quad m = -n, -n+1, \dots, n. \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta, \varphi) = \iint d^2 o' u(R, \theta', \varphi') \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{H_{n-\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 R)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 R)} - \frac{(n+1)}{k_0 R} \right) \sum_{m=-n}^n Y_{nm}^*(\theta', \varphi') Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (3.14)$$

<sup>18</sup> For formally other functions - already from spherical coordinates - we leave the previous designations.

<sup>19</sup> In new sources (see Wikipedia), complex spherical functions (3.6) are denoted with subscript and superscript:  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ , and two subscripts are used for real-valued spherical functions. But in this work only complex spherical functions are used, so we follow the old tradition.

It can be seen from the relation obtained that the normal derivative of the desired function on the spherical boundary is expressed in terms of the values of the desired function on this boundary using the action of a linear unbounded operator on the right side of (3.14). This operator has received a name in the literature: *the Dirichlet to Neumann map* (DtN) [9]. The eigenfunctions of the operator are the spherical functions  $Y_{nm}$ , and the coefficients in parentheses are the spectrum of the operator. The spectrum is unbounded because the first term in parentheses in (3.14) is bounded, but the second is not. For functions that are not a finite linear combination of  $Y_{nm}$ , the representation (3.14) is not convenient to use and needs to be converted to a form that does not contain divergent series. Let's show how this can be done.

For spherical functions, *the addition theorem* holds [20]: if

$$\cos \gamma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'), \quad (3.15)$$

is true, where

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}' = \begin{bmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' \\ \cos \theta' \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

then it holds

$$\sum_{m=-n}^n Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{nm}^*(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} Y_{n0}(\gamma) = \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos \gamma). \quad (3.17)$$

In what follows, for functions of angular variables  $u(\theta, \varphi), u(\theta', \varphi')$ , we will also use vector notation for arguments:  $\mathbf{u}(\mathbf{n}), \mathbf{u}(\mathbf{n}')$ , implying dependence on the position of a point on the surface of a sphere.

Substituting (3.17) into (3.14), we obtain

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \oint d^2 o' u(R, \theta', \varphi') \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{H_{n-\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 R)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 R)} - \frac{(n+1)}{k_0 R} \right) (2n+1) P_n(\cos \gamma). \quad (3.18)$$

So, the desired boundary condition on a sphere of radius  $R$  has the form:

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} \oint d^2 o' u(R, \mathbf{n}') DtN(k_0 R; \mathbf{n}, \mathbf{n}'), \quad (3.19)$$

where the kernel  $DtN$  of the linear operator is given with expression

$$DtN(z; \mathbf{n}, \mathbf{n}') = DtN(z, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{H_{n-\frac{1}{2}}^{(1)}(z)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z)} - \frac{(n+1)}{z} \right) (2n+1) P_n(\xi). \quad (3.20)$$

The kernel  $DtN$  of the operator in (3.19) is singular at  $\mathbf{n}' = \mathbf{n}$ , and symmetric in the angular variables  $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ . The functional series (3.20) diverges in general. This is not surprising, since the kernels of linear operators are generalized functions.

Let's divide the expression (3.20) into three components: calculation, analytical and singular:

$$DtN(z, \xi) = R(z, \xi) + A(z, \xi) + S(z, \xi), \quad (3.21)$$

$$R(z, \xi) = i + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{H_{n-\frac{1}{2}}^{(1)}(z)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z)} (2n+1) - z \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) P_n(\xi), \quad (3.22)$$

$$A(z, \xi) = z \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) P_n(\xi), \quad (3.23)$$

$$S(z, \xi) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2n+1) P_n(\xi). \quad (3.24)$$

The calculation component corresponds to a bounded operator and is determined by a series that converges absolutely and uniformly (see below). The analytical component is summed up using reference formulas (see [21] formula 6.5.1.1 at  $x = \xi = \cos \gamma, \mu = 0$ ; [22] formula 8.926 A(9063.2)) and gives the integrable kernel of the bounded operator (in  $L_2(S^2)$ ):

$$A(z, \xi) = z \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1-\xi}} - 1 - \ln \sqrt{\frac{1-\xi}{2}} - \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1-\xi}{2}} \right) \right), \quad (3.25)$$

The singular component corresponds to an unbounded integro-differential operator, the explicit form of which will be obtained below.

**4. The calculation component.** Let us prove here that the series (3.22) converges absolutely and uniformly in  $\xi$ ,  $-1 \leq \xi \leq 1$ . Due to the properties of Legendre polynomials  $|P_n(\xi)| \leq 1$ ,  $-1 \leq \xi \leq 1$ , it suffices to prove the convergence of the series

$$\bar{R}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z)} (2n+1) - z \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| \quad (4.1)$$

for any fixed  $z > 0$ .

Lemma. For any fixed  $z > 0$  there exists a finite limit

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ n \in \mathbb{Z}}} n^2 \left( \frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z)} (2n+1) - z \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = c(z). \quad (4.2)$$

A corollary of the lemma is the statement about the absolute and uniform convergence of the series (3.22).

Proof. We use the representation of the Hankel functions of a half-integer argument in the form of series:

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = i(-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-(n+\frac{1}{2})}}{\Gamma(k-(n+\frac{1}{2})+1)k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+n+\frac{1}{2}+1)k!}. \quad (4.3)$$

It follows from the formulas [23], [24]:

$$H_{\nu}^{(1)}(z) \equiv \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-\pi\nu i} J_{\nu}(z)}{i \sin \pi\nu}, \quad \nu \notin \mathbb{Z}, \quad (4.4)$$

$$J_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \quad (4.5)$$

Here  $\mathbb{Z}$  is a set of integers.

We transform expression (4.3) as follows:

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = i(-1)^{n+1} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k-(n+\frac{1}{2})+1)k!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2n+1}}{\Gamma(k+n+\frac{1}{2}+1)k!} \right). \quad (4.6)$$

To get away from the negative values of the argument in the gamma function in the first terms of the series, we use *the Euler complement formula* [25]:

$$\Gamma(1-\nu)\Gamma(\nu) = \frac{\pi}{\sin \pi\nu}, \quad \nu \notin \mathbb{Z}. \quad (4.7)$$

In what follows, we will also use the well-known property of the gamma function [25], called *the functional Euler equation*:

$$\Gamma(1+\nu) = \nu\Gamma(\nu). \quad (4.8)$$

We obtain

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = -\frac{i}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}-k)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!} + i\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2n+1}}{\Gamma(k+n+\frac{3}{2})k!} \right). \quad (4.9)$$

Next, we take out of brackets the largest factor  $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ :

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = -\frac{i}{\pi} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}-k)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!} + \frac{i\pi}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2n+1}}{\Gamma(k+n+\frac{3}{2})k!} \right). \quad (4.10)$$

The gamma function of the half-integer argument increases monotonically in absolute value with the growth of the argument everywhere, except for three values of the argument:  $-1/2$ ;  $1/2$ ;  $3/2$ , at which the absolute value of the gamma function decreases:  $2\sqrt{\pi}$ ;  $\sqrt{\pi}$ ;  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$  respectively. For large values of  $n$  in formula (4.10), this does not affect the fact that the factor from the gamma functions in the first sum in all terms of the series, except for the first, is less than 1 in absolute value. The gamma factor in the second sum has a similar property.

We select the first two terms from the first series:

$$\begin{aligned} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) &= -\frac{i}{\pi} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} \times \\ &\times \left( 1 + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{n-\frac{1}{2}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-k\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!} + \frac{i\pi \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{\Gamma\left(k+n+\frac{3}{2}\right)k!} \right). \\ H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) &= -\frac{i}{\pi} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} \times \end{aligned}$$

$$\times \left( 1 + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{n-\frac{1}{2}} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\frac{3}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{3}{2})} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k+2)!} + \frac{i\pi \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+n+\frac{3}{2}) k!} \right). \quad (4.11)$$

Let's denote the series:

$$r_n(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\frac{3}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{3}{2})} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k+2)!}, \quad (4.12)$$

$$r'_n(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+n+\frac{3}{2}) k!}. \quad (4.13)$$

These series, in any case, are bounded functions of the variable  $n$  for any fixed value of  $z$ :

$$|r_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k+2)!} = \frac{\exp\left(\left(\frac{z}{2}\right)^2\right) - \left(1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^4\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^4}, \quad (4.14)$$

$$|r'_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!} = \exp\left(\left(\frac{z}{2}\right)^2\right). \quad (4.15)$$

We will also need the following estimate:

$$\begin{aligned} r_{n-1}(z) - r_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(n-\frac{5}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{5}{2})} - \frac{\Gamma(n-\frac{3}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{3}{2})} \right) \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k+2)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(n-\frac{7}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{5}{2})} - \frac{\Gamma(n-\frac{5}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{3}{2})} \right) \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2}}{(k+3)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(n-\frac{7}{2}) \Gamma(n-\frac{7}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{5}{2}) \Gamma(n-\frac{7}{2})} - \frac{\Gamma(n-\frac{5}{2}) \Gamma(n-\frac{5}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{3}{2}) \Gamma(n-\frac{5}{2})} \right) \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2}}{(k+3)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n-\frac{7}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{7}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{7}{2})} - \frac{1}{n-\frac{5}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{5}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{5}{2})} \right) \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2}}{(k+3)!}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} |r_{n-1}(z) - r_n(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n-\frac{7}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{7}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{7}{2})} - \frac{1}{n-\frac{5}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{5}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{5}{2})} \right) \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2}}{(k+3)!} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n-\frac{7}{2}} \left| \frac{\Gamma(n-\frac{7}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{7}{2})} \right| + \frac{1}{n-\frac{5}{2}} \left| \frac{\Gamma(n-\frac{5}{2}-k)}{\Gamma(n-\frac{5}{2})} \right| \right) \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2}}{(k+3)!} \leq \\ &\leq \left( \frac{1}{n-\frac{7}{2}} + \frac{1}{n-\frac{5}{2}} \right) \frac{\exp\left(\left(\frac{z}{2}\right)^2\right) - \left(1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^4\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^4}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

It means that

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ n \in \mathbb{Z}}} (r_{n-1}(z) - r_n(z)) = 0. \quad (4.18)$$

Expression (4.11) with notations (4.12), (4.13) takes a more compact form:

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = -\frac{i}{\pi} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} f_n(z), \quad (4.19)$$

$$f_n(z) \equiv 1 + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{n-\frac{1}{2}} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})} r_n(z) + \frac{i\pi \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} r'_n(z). \quad (4.20)$$

It can be seen that the function  $f_n(z)$  introduced here tends to unity as  $n \rightarrow \infty$ .

Now, with the help of the obtained representations, let us calculate the limit (4.2).

$$\begin{aligned}
c(z) &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ n \in \mathbb{Z}}} n^2 \left( \frac{\frac{H^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(z)}{n^{-\frac{1}{2}}}(2n+1) - z \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(z)} \right) = \\
&= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ n \in \mathbb{Z}}} n^2 \left( \frac{-\frac{i}{\pi} \Gamma(n - \frac{1}{2}) \left(\frac{z}{2}\right)^{-(n-\frac{1}{2})} f_{n-1}(z)}{-\frac{i}{\pi} \Gamma(n + \frac{1}{2}) \left(\frac{z}{2}\right)^{-(n+\frac{1}{2})} f_n(z)} (2n+1) - z \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \\
&= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ n \in \mathbb{Z}}} n^2 \left( \frac{\left(\frac{z}{2}\right) f_{n-1}(z)}{\left(n - \frac{1}{2}\right) f_n(z)} (2n+1) - z \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \\
&= z \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ n \in \mathbb{Z}}} n^2 \left( \frac{f_{n-1}(z)(2n+1)}{f_n(z)} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \\
&= z \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ n \in \mathbb{Z}}} n^2 \left( \frac{f_{n-1}(z)(2n+1)}{f_n(z)(2n-1)} - \frac{n+1}{n} \right) = \\
&= z \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ n \in \mathbb{Z}}} n^2 \frac{f_{n-1}(z)n(2n+1) - (n+1)f_n(z)(2n-1)}{f_n(z)(2n-1)n} = \\
&= z \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ n \in \mathbb{Z}}} n^2 \frac{f_{n-1}(z)(2n^2+n) - f_n(z)(2n^2+n-1)}{f_n(z)(2n-1)n} = \\
&= z \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ n \in \mathbb{Z}}} n^2 \frac{(2n^2+n)(f_{n-1}(z) - f_n(z)) + f_n(z)}{f_n(z)(2n-1)n} = \\
&= \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ n \in \mathbb{Z}}} (2n^2+n)(f_{n-1}(z) - f_n(z)) = \\
&= \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ n \in \mathbb{Z}}} (2n^2+n) \left( 1 + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{n - \frac{3}{2}} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{\left(n - \frac{3}{2}\right)\left(n - \frac{5}{2}\right)} r_{n-1}(z) + \frac{i\pi \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-1}}{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} r'_{n-1}(z) - \right. \\
&\quad \left. - 1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{n - \frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)} r_n(z) - \frac{i\pi \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} r'_n(z) \right) = \\
&= \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ n \in \mathbb{Z}}} (2n^2+n) \left( \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{n - \frac{3}{2}} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{n - \frac{1}{2}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{\left(n - \frac{3}{2}\right)\left(n - \frac{5}{2}\right)} r_{n-1}(z) - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)} r_n(z) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{i\pi \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-1}}{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} r'_{n-1}(z) - \frac{i\pi \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} r'_n(z) \right).
\end{aligned}$$

The last parenthesized line in the limit disappears because the gamma function grows faster than both the power function and the exponent. Next, we get

$$\begin{aligned}
c(z) &= \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^3 \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{Z}}} \left( \frac{(2n^2 + n)}{\left(n - \frac{3}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right)} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 \left( \frac{(2n^2 + n)r_{n-1}(z)}{\left(n - \frac{3}{2}\right)\left(n - \frac{5}{2}\right)} - \frac{(2n^2 + n)r_n(z)}{\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)} \right) \right) = \\
&= \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^3 \left( 2 + 2 \left(\frac{z}{2}\right)^2 \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{Z}}} (r_{n-1}(z) - r_n(z)) \right) = \frac{z}{2} + 2 \left(\frac{z}{2}\right)^3.
\end{aligned}$$

In this way,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{Z}}} n^2 \left( \frac{\frac{H^{(1)}(z)}{n-\frac{1}{2}}}{\frac{H^{(1)}(z)}{n+\frac{1}{2}}} (2n+1) - z \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \frac{z}{2} + 2 \left(\frac{z}{2}\right)^3. \quad (4.21)$$

The lemma is proven.

As already mentioned, this proves the absolute and uniform convergence of the series (3.22), which determines the computational part of the Dirichlet-Neumann operator.

**5. The singular part of the operator DtN.** Expression (3.24) admits the following further processing. To obtain a convergent series, one should use the formula [14] for one of the properties of spherical functions:

$$A' Y_{nm}^*(\theta', \varphi') = -n(n+1) Y_{nm}^*(\theta', \varphi'). \quad (5.1)$$

Here  $A'$  means the operator (3.3) taken with respect to the variables  $\theta', \varphi'$ . Using formula (3.17), we represent expression (3.24) as

$$S(z, \xi) = S(z; \mathbf{n}, \mathbf{n}') = -\frac{4\pi}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(\mathbf{n}) Y_{nm}^*(\mathbf{n}'). \quad (5.2)$$

This is the spectral expansion of the singular part  $S$  of the operator DtN in terms of its eigenfunctions, the spherical functions<sup>20</sup>.

Using (5.1), we substitute into (5.2) the expression

$$Y_{nm}^*(\theta', \varphi') = A' \frac{-1}{n(n+1)} Y_{nm}^*(\theta', \varphi'), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

For transformations, we use the well-known formulas (see [22] formula 6.5.1.1 at  $x = \cos \gamma$ ,  $\mu = 0$ ; also [23] formula 8.926 A(9063.2)):

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \gamma) = \frac{1}{2} \csc \frac{\gamma}{2}, \quad P_0(\cos \gamma) = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P_n(\cos \gamma) = -\ln \sin \frac{\gamma}{2} - \ln \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2}\right), \quad (5.4)$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos \gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1-\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'}{2}}. \quad (5.5)$$

We obtain

$$S(z; \mathbf{n}, \mathbf{n}') = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} A' F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'), \quad (5.6)$$

$$F = \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} - \ln \sin \frac{\gamma}{2} - \ln \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{1-\xi}} - \ln \sqrt{\frac{1-\xi}{2}} - \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1-\xi}{2}}\right). \quad (5.7)$$

Let us note here that in representation (5.6) the kernel  $S$  formally ceased to be a symmetric function of the scalar product of vectors  $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ , since the angular operator  $A'$  acts on the variables  $\theta', \varphi'$ , but does not act on the variables  $\theta, \varphi$ . Symmetry had to be sacrificed temporarily in order to get away from the divergent expression (3.24). The symmetry will be restored farther, and the way is rather interesting.

The angular part of the Laplace operator (3.3) can be expanded into a product of first-order differential operators acting on the sphere:

$$A = \operatorname{div} \nabla, \quad (5.8)$$

Here  $\nabla$  means the gradient operator on the sphere

$$\nabla u(\theta, \varphi) \equiv \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right), \quad (5.9)$$

The divergence operator on the sphere has the form

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\varphi, \quad (5.10)$$

here  $\mathbf{v}$  is an arbitrary vector field on a sphere of unit radius

$$\mathbf{v} = (v_\theta(\theta, \varphi) \quad v_\varphi(\theta, \varphi)), \quad \mathbf{v}^2 = v_\theta^2 + v_\varphi^2. \quad (5.11)$$

Note that the sphere has no boundary, and all integrals of the total divergence of smooth vector functions vanish. Operator kernels have singularities; when integrating them, all expressions should be understood as a *weak*

<sup>20</sup> The expansion of the operator DtN itself is given by formula (3.14).

*limit of regularized expressions*<sup>21</sup>. Representation (5.8) makes it possible, by integrating twice by parts, to permute the operators:

$$v(\mathbf{n}) = \oint\oint d^2 o' (\Lambda' F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')) u(\mathbf{n}') = \oint\oint d^2 o' F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \Lambda' u(\mathbf{n}'). \quad (5.12)$$

Therefore, in view of representation (5.12), expression (5.6) can also be written in the form:

$$S(z; \mathbf{n}, \mathbf{n}') = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \Lambda', \quad (5.13)$$

where it is understood that the differential operator  $\Lambda'$  does not act on  $F$ , but on a sufficiently smooth function that will stand on the right. The usefulness of expression (5.13) is that  $F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')$  contains a singularity already *integrable* on the sphere at  $\mathbf{n}' = \mathbf{n}$ , while the integral of (5.6) diverges. Expression (5.13) shows that the operator

$$S = \frac{1}{z} (F \Lambda - I()) \quad (5.14)$$

where

$$F u(\mathbf{n}) = \oint\oint d^2 o' F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') u(\mathbf{n}'), \quad (5.15)$$

$$I u(\mathbf{n}) = \oint\oint d^2 o' u(\mathbf{n}'), \quad (5.16)$$

is an integro-differential operator of the 2nd (differential) order. All three operators:  $\hat{F}$ ,  $\Lambda$ ,  $I$ , included in the right side of the expression (5.14), have the same set of eigenfunctions, these are spherical functions  $Y_{nm}(\theta, \varphi)$ . Therefore, the operator factors in (5.14) commute with each other and are self-adjoint operators, just like the operator (5.14) itself. The boundary condition with the operator of the 2nd differential order along the boundary, however, is not convenient for applying the *finite element method* (FEM) in calculations, since the idea of the method is to apply the so-called *semi-weak* form of a boundary value problem for second-order partial differential equations (see J. Descloux [26], also [27]). It allows to bypass the calculation of the second derivatives of the desired function in a process of numerical solving. Therefore, it is highly desirable to find a representation for a new type of boundary conditions also in a *semi-weak* form, that is, not containing second derivatives of the desired function along the boundary.

#### 6. Semi-weak form of the boundary conditions.

Consider the bilinear form<sup>22</sup>:

$$B(u, v) = \oint\oint d^2 o' v * (\mathbf{n}) \oint\oint d^2 o' F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \Lambda' u(\mathbf{n}') = (\hat{F} \Lambda u, v). \quad (6.1)$$

Is it possible to convert this form to a symmetrical view

$$B_1(u, v) = \oint\oint d^2 o' \oint\oint d^2 o' \frac{\partial v^*}{\partial \tau}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') b(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \frac{\partial u}{\partial \tau'}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \equiv \left( \hat{b} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \frac{\partial v}{\partial \tau} \right), \quad (6.2)$$

including only the first derivatives of functions  $u, v$ ? Here  $\tau, \tau'$  are the vectors tangent to the surface of the unit sphere at the points  $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$  and directed towards each other tangentially along the arc of the great circle connecting these points. Directional derivatives are defined along them

$$\frac{\partial v^*}{\partial \tau} = \frac{\partial v^*}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \cos \alpha + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \sin \alpha, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau'} = \frac{\partial u}{\partial \theta'}(\theta', \varphi') \cos \alpha' + \frac{1}{\sin \theta'} \frac{\partial u}{\partial \varphi'}(\theta', \varphi') \sin \alpha'. \quad (6.4)$$

Angles  $\alpha, \alpha'$  are the rotation angles of the vectors  $\tau, \tau'$  relative to the meridians  $\varphi = \text{const}$  and  $\varphi' = \text{const}$  of the selected coordinate system on the sphere, respectively. It can be shown that they are determined by the relations

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \arccos \xi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}, \quad (6.5)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}; \quad (6.6)$$

$$\cos \alpha' = -\frac{\partial \gamma}{\partial \theta''}, \quad (6.7)$$

$$\sin \alpha' = -\frac{1}{\sin \theta'} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi'}. \quad (6.8)$$

Here the function  $\gamma = \gamma(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$  is defined from (3.15). For directional derivatives (6.3) and (6.4) we obtain

$$\frac{\partial v^*}{\partial \tau}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = -\left( \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \right) = -\nabla v * \nabla \gamma, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau'}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = -\left( \frac{\partial u}{\partial \theta'} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta'} + \frac{1}{\sin^2 \theta'} \frac{\partial u}{\partial \varphi'} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi'} \right) = -\nabla' u \cdot \nabla' \gamma. \quad (6.10)$$

<sup>21</sup> The regularization here is performed in such a way that at  $\xi = \pm 1$ , the kernel has a finite value, and the derivative vanishes.

<sup>22</sup> Here the last expression implies the scalar product in the Hilbert space  $L_2(S^2)$  of functions integrable on the sphere of unit radius with modulus squared.

From relations  $\xi = \cos \gamma$  and (3.15) one can obtain useful relations:

$$(\nabla \xi)^2 = (1 - \xi^2), \quad (6.11)$$

$$(\nabla \gamma)^2 = 1. \quad (6.12)$$

$$\Delta \gamma = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \cot \gamma. \quad (6.13)$$

Let us substitute representation (6.9) into expression (6.2) and integrate by parts in the first integral

$$B_1(u, v) = \oint d^2 o \nu * \oint d^2 o' \frac{\partial u}{\partial \tau} \sqrt{1 - \xi^2} \left( b \frac{\xi}{1 - \xi^2} - b' \right) - \oint d^2 o \operatorname{div} \left( v * \oint d^2 o' (\nabla \gamma) b \frac{\partial u}{\partial \tau} \right).$$

$$B_1(u, v) = - \oint d^2 o \nu * \oint d^2 o' \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{d}{d\xi} \left( b(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} \right) - \oint d^2 o \operatorname{div} \left( v * \oint d^2 o' (\nabla \gamma) b \frac{\partial u}{\partial \tau} \right). \quad (6.14)$$

But, on the other hand, from definition (6.1), the same form is expressed in terms of the function  $F$  obtained earlier:

$$B(u, v) = \oint d^2 o \nu * \oint d^2 o' \operatorname{div} \left[ \left( F(\xi) \nabla' u(n') \right) - \oint d^2 o \nu * \oint d^2 o' F'(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} \right]. \quad (6.15)$$

Comparison of expressions (6.14) and (6.15), provided that terms with total divergence under the integral vanish<sup>23</sup>, and taking into account arbitrary functions  $u, v$ , leads to the equation

$$\begin{aligned} b'(\xi) - b(\xi) \frac{\xi}{1 - \xi^2} &= F'(\xi), \\ \frac{d}{d\xi} \left( b(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} \right) &= F'(\xi) \sqrt{1 - \xi^2}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

which defines the desired function  $b$ . The general solution of this ODE has the form

$$b(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} = C + \int_{-1}^{\xi} d\xi' F'(\xi') \sqrt{1 - \xi'^2}. \quad (6.17)$$

Substituting the expression (5.7) for  $F$  and performing the integration gives the expression

$$b(\xi) = \frac{2 \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{1+\xi}{2}}}{\sqrt{1-\xi^2}} - 1 + \frac{C}{\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (6.18)$$

$$b(\cos \gamma) \sin \gamma = 2 \operatorname{arcth} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \gamma, \quad C = 0. \quad (6.19)$$

If we put  $C = 0$ , then the expression for  $b$  vanishes at  $\xi = -1$ , and the expression has only one (integrable) singularity at  $\xi = +1$ . For  $C \neq 0$ , this expression has two (integrable) singularities at  $\xi = \pm 1$ . The requirement that there be no singularity at  $\xi = -1$  is quite natural, since the function  $F$  does not have a singularity also at this antipode point.

Fig. 1 shows how expression (6.19) can be *regularized* and should be understood as a weak regularization limit.

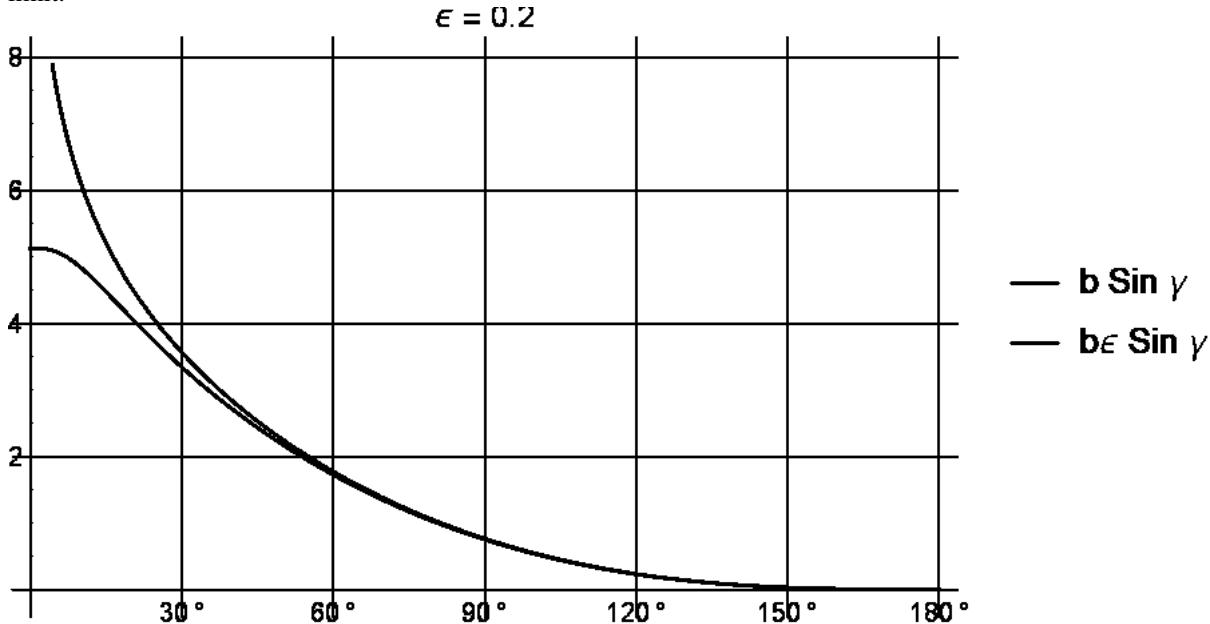


Fig. 1. Regularization effect for  $b$ .

<sup>23</sup> The vanishing depends on the nature of the singularity of the expressions for  $b$  and  $F$  at  $\xi \rightarrow +1$ , since the singular point on the sphere creates the boundary of the integration region, which is absent for smooth functions.

Studies have shown that terms with total divergence in expressions (6.14), (6.15) vanish in the weak limit.

**7. Sommerfeld asymptotic for the operator DtN.** At large distances  $z \gg 1$ , the role of the singular part  $S$  (5.14) or (3.24) rapidly decreases with increasing  $z$  due to the factor  $\frac{1}{z}$ . Let us analyze the properties of the regular part: the sum  $K \equiv R + A$  of expressions (3.22) and (3.23)

$$K(z, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n-\frac{1}{2}}^{(1)}(z)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z)} (2n+1) P_n(\xi). \quad (7.1)$$

The regular part has the property of localization of the kernel as the dimensionless radius  $z$  of the boundary sphere increases. Fig. 2 shows the behavior of the regular part of the mapping DtN: as  $z$  increases, it becomes more and more localized to the delta function (see below).

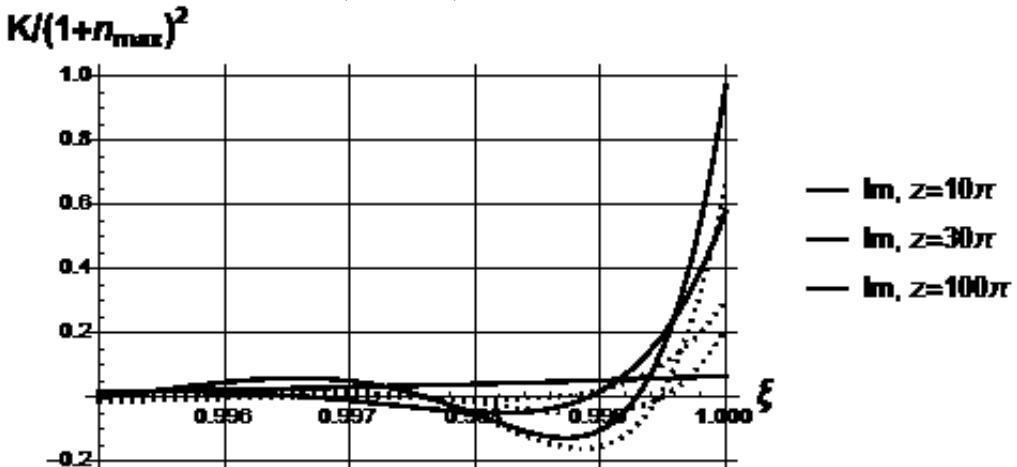


Fig. 2. Numerical calculations of the imaginary (solid line) and real (dotted line) parts of the regular part  $K$  of the operator  $DtN$  divided by  $Im K \left( \infty, 1; n_{max} \right) \sum_{n=0}^{n_{max}} (2n+1) \right)$ . The first 402 terms of series (3.22) at  $z = 10\pi$  (blue),  $z = 30\pi$  (red), and  $z = 100\pi$  (brown) are included.

The Sommerfeld conditions (2.2) imply not only a large (dimensionless) distance  $z = k_0 R$ ,  $z \gg 1$  to the vicinity of the observation point, but also a fairly small size of the region  $z_1 = k_0 R_1$ ,  $z_1 \ll z$  in which the radiation source is concentrated. Indeed, if we imagine that  $z_1$  also increases infinitely together with  $z$ , then it becomes obvious that the second of conditions (2.2) may not be satisfied. For example, two point sources of a field and an observation point form an equilateral triangle, the size of which (in wavelengths) increases indefinitely. At the observation point, we will get a picture of the interference of two plane waves propagating at an angle of 60 degrees to each other, and such a field does not correspond to (2.2). Also, the first of the conditions (2.2) may not be satisfied if the field sources are allowed to be at a finite distance from the boundary sphere as its radius increases (that is, seek the limit  $z \rightarrow \infty$  at  $z - z_1 = const$ ). Obviously, conditions (2.2) must be satisfied when passing to the limit  $z \rightarrow \infty$ ,  $z_1 = const$ . But this requirement is stronger than the one under which the problem was solved:  $0 < R_1 < R$  (or in dimensionless quantities  $0 < z_1 < z$ ). The effect of an *additional* requirement leading to conditions (2.2) is to cut off the high-order angular modes<sup>24</sup> before passing to the limit  $z \rightarrow \infty$ , which masks the effect of the lack of uniform convergence of the series  $K$  (7.1) defining the operator kernel. This additional requirement makes it possible to replace the Hankel functions in the representation (7.1) at large distances by their well-known asymptotic expression (3.7), which substitutes (7.1) with its asymptotic representation

$$K(\infty, \xi) = i \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\xi) = 2i\delta(1-\xi). \quad (7.2)$$

i.e., leads the kernel to localization in angles, and (3.19) to the formula for a plane wave. Indeed, we use the formulas:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(\mathbf{n}) Y_{nm}^*(\mathbf{n}') &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'), \\ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\xi) &= \delta(1-\xi). \end{aligned} \quad (7.3)$$

<sup>24</sup> The number of significant angular modes is proportional to the number of wavelengths that fit on the length of the great circle of the ball  $O_1$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(\mathbf{n}) Y_{nm}^*(\mathbf{n}') = \delta^2(\mathbf{n}, \mathbf{n}'). \quad (7.4)$$

The first equality is the addition theorem (3.17). Equality (7.3) is the series expansion of the delta function in Legendre polynomials, it follows from the orthogonality and normalization of Legendre polynomials [13-15]:

$$\int_{-1}^1 d\xi P_m(\xi) P_n(\xi) = \delta_{mn} \frac{2}{2n+1}.$$

Indeed, for any continuous function  $f(\xi)$ ,  $-1 \leq \xi \leq 1$  we have:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 d\xi f(\xi) \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_{-1}^1 d\xi f(\xi) P_n(\xi) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_{-1}^1 d\xi \left( \sum_{m=0}^{\infty} f_m P_m(\xi) \right) P_n(\xi) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^{\infty} f_m \int_{-1}^1 d\xi P_m(\xi) P_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_m \delta_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(1) = f(1). \end{aligned}$$

But by definition we have also  $\int_{-1}^1 d\xi f(\xi) \delta(1 - \xi) = f(1)$ .

Equality (7.4) is the expansion of a two-dimensional delta function on a sphere into a series in terms of spherical functions; it follows from the orthogonality and normalization (3.6) of spherical functions. Indeed, we rewrite (3.6) as

$$\iint d^2 o' Y_{lm}(\mathbf{n}') Y *_{l'm'}(\mathbf{n}') = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Multiply by  $Y_{l'm'}(\mathbf{n})$  and sum over primed indices

$$\sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} Y_{l'm'}(\mathbf{n}) \iint d^2 o' Y_{lm}(\mathbf{n}') Y *_{l'm'}(\mathbf{n}') = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} Y_{l'm'}(\mathbf{n}) \delta_{ll'} \delta_{mm'} = Y_{lm}(\mathbf{n}).$$

Let's represent the result in the form

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\mathbf{n}) &= \iint d^2 o' Y_{lm}(\mathbf{n}') \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} Y_{l'm'}(\mathbf{n}) Y *_{l'm'}(\mathbf{n}') = \iint d^2 o' X(\mathbf{n}, \mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}'), \\ X(\mathbf{n}, \mathbf{n}') &\equiv \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} Y_{l'm'}(\mathbf{n}) Y *_{l'm'}(\mathbf{n}'). \end{aligned}$$

Multiply by  $f_{lm}$  and sum over all indices

$$\begin{aligned} f(\mathbf{n}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} \iint d^2 o' X(\mathbf{n}, \mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}') = \\ &= \iint d^2 o' X(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}') = \iint d^2 o' X(\mathbf{n}, \mathbf{n}') f(\mathbf{n}'). \end{aligned}$$

Since  $f$  is arbitrary, we conclude that

$$X(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \delta^2(\mathbf{n}, \mathbf{n}').$$

The spectral expansion (7.4) expresses a well-known fact: the spectrum of an identical operator consists of a single point, unity.

We substitute asymptotic (7.2) into (3.19):

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} \iint d^2 o' u(R, \mathbf{n}') D t N(k_0 R; \mathbf{n}, \mathbf{n}'),$$

Singular part (3.24) of the kernel  $D t N$  is not localized at large distances because it is a product of a function of  $z$ -variable and the operator depending on directions  $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$  only. Taking into account the disappearance of the singular part at large distances due to the factor  $\frac{1}{z}$ , we get:

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial u}{\partial r}(\infty, \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} \iint d^2 o' u(\infty, \mathbf{n}') K(\infty, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'),$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_0} \frac{\partial u}{\partial r}(\infty, \mathbf{n}) &= \frac{1}{4\pi} \iint d^2 o' u(\infty, \mathbf{n}') 2i\delta(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'), \\
\frac{1}{k_0} \frac{\partial u}{\partial r}(\infty, \mathbf{n}) &= \frac{1}{4\pi} \iint d^2 o' u(\infty, \mathbf{n}') 4\pi i \delta^2(\mathbf{n}, \mathbf{n}'), \\
\frac{\partial u}{\partial r}(\infty, \mathbf{n}) &= ik_0 \iint d^2 o' u(\infty, \mathbf{n}') \delta^2(\mathbf{n}, \mathbf{n}'), \\
\frac{\partial u}{\partial r}(\infty, \mathbf{n}) &= ik_0 u(\infty, \mathbf{n}).
\end{aligned} \tag{7.5}$$

And this is the Sommerfeld asymptotic (2.2).

**8. Conclusions.** Here, the problem of transferring the Sommerfeld radiation boundary condition from infinity to a sphere of finite radius is solved for a boundary value problem with a three-dimensional Helmholtz equation. The boundary condition has the form of a linear integro-differential relation (3.19), which relates the value of the desired function and its normal derivative on the boundary of the spherical region in a *non-local* way:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_0} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \mathbf{n}) &= \frac{1}{4\pi} \iint d^2 o' u(R, \mathbf{n}') K(k_0 R, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') - \\
&- \frac{1}{4\pi k_0 R} \left( \iint d^2 o' u(R, \mathbf{n}') - \iint d^2 o' F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') A' u(R, \mathbf{n}') \right).
\end{aligned} \tag{8.1}$$

The kernel of the operator on the boundary sphere can be divided into the regular part  $K$  (the sum of (3.22) and (3.23), an integral operator) and the singular part  $S$  (3.24). The latter, with subtraction the operator of averaging over angles, can be represented as a product of two commuting self-adjoint operators: integral and differential 2nd order (5.14). The regular part of the operator  $K$  can be decomposed into the analytical part  $A$  (3.25) and the computational part  $R$  (3.22), the latter is computable using an absolutely and uniformly convergent series.

The bilinear form (6.1) generated by the singular part (3.24) of the boundary condition operator (3.14) admits a symmetric representation (6.2) containing derivatives of at most 1st order. This favors the future development of the *finite element method* (FEM) for solving boundary value problems with a new type of boundary conditions. This enables to represent the boundary condition in the form (3.19):

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} \iint d^2 o' u(R, \mathbf{n}') D t N(k_0 R; \mathbf{n}, \mathbf{n}'),$$

where the kernel of the Dirichlet-Neumann mapping is defined by the formulas

$$D t N(z; \mathbf{n}, \mathbf{n}') = K(z, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') - \frac{1}{z} \left( 1 + \operatorname{div} \left( (\nabla \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')) b(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') (\nabla' \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')) \right) \cdot \nabla' \right). \tag{8.2}$$

Or in operator form:

$$\begin{aligned}
D t N &= K - \frac{1}{z} (I + \operatorname{div} M \nabla), \\
D t N u(R, \mathbf{n}) &\equiv \iint d^2 o' u(R, \mathbf{n}') D t N(k_0 R; \mathbf{n}, \mathbf{n}'), \\
K u(R, \mathbf{n}) &\equiv \iint d^2 o' u(R, \mathbf{n}') K(k_0 R, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'), \\
M \mathbf{v}(\mathbf{n}) &\equiv \iint d^2 o' M(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \mathbf{v}(\mathbf{n}'), \\
M(\mathbf{n}, \mathbf{n}') &\equiv (\nabla \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')) b(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') (\nabla' \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'))^T.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Here the symbols  $\operatorname{div}$ ,  $\gamma$ ,  $\nabla \gamma$ ,  $b$ ,  $\nabla' \gamma$  are defined by formulas (5.10), (3.15), (5.9), (6.18), (5.9) (in primed variables), respectively. The kernel  $M$  is a degenerate symmetric real  $2 \times 2$  matrix. The singular part is reduced to a symmetrical form<sup>25</sup>, containing only first-order derivatives  $\nabla' \mathbf{u}$  of the boundary value of the desired function on the sphere.

This new type of boundary condition is proposed to be called *the boundary condition of the 4<sup>th</sup> kind*. The

boundary condition of the 3<sup>rd</sup> kind (the Robin condition) is a generalization of the historically initial conditions of the 1<sup>st</sup> kind (Dirichlet) and the 2<sup>nd</sup> kind (Neumann). The boundary condition of the 4<sup>th</sup> kind is a further generalization of the condition of the 3<sup>rd</sup> kind to the nonlocal case. There is a limit at which the boundary condition of the 4<sup>th</sup> kind (nonlocal) passes into the boundary condition of the 3<sup>rd</sup> kind (localized). If the radius  $R$  of the boundary sphere has many wavelengths (wave zone), and the radius of the ball  $R_1$ , in which the radiation source is enclosed, is much less than  $R$ , then

<sup>25</sup> The symmetry is meant in the sense of the generated bilinear form, it is similar to the symmetry of the Legendre operator  $(d/d\xi)(1-\xi^2)(d/d\xi)$ .

the relationship between the function and its normal derivative is localized, and the nonlocal boundary condition can be approximately replaced by a local condition of the third kind (the Robin condition):

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, \mathbf{n}) \approx ik_0 u(R, \mathbf{n}). \quad (8.5)$$

The latter is known also in the literature as the Sommerfeld radiation condition (2.2).

Currently, such well-known packages as "Wolfram Mathematica" and COMSOL are not prepared for solving problems with non-local boundary conditions.

**9. Acknowledgements.** The author is grateful to his colleagues Dr. Yu. V. Yakovenko and Dr. O. S. Burdo for a useful discussion of the work, as well as Dr. eng. I. S. Petukhov for help in selecting literature.

### References

1. Sobolev S.L. Equations of mathematical physics. ML: GITTL, 1950. P. 31.
2. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, V. 1. ML: GITTL, 1951. P. 158.
3. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, V. 2. ML: GITTL, 1951, P. 460, 482.
4. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. M.: Nauka, 1981. P. 73.
5. Dorodnicyn, L.V. Nonreflecting boundary conditions and numerical simulation of external flows. Comput. Math. and Math. Phys. 51, 143–159 (2011).
6. Ilgamov M.A., Gilmanov A.N. Non-reflecting conditions at the boundaries of the computational domain. M.: Fizmatlit, 2003.
7. Barusk H., Dupois Saint-Guiron A.-G., Tordo S. Non-reflecting boundary condition on an ellipsoidal boundary Sib. J. Comput. Mathematics /RAS. Sib. dept. Novosibirsk. 15, 2, 131-139 (2012).
8. A.A. Konstantinov, V.P. Maslov, A.M. Chebotarev. Shift of the boundary conditions for partial differential equations. USSR Comput. Math. and Math. Phys. 28, 6, 111-121 (1988).
9. Keller J.B. Exact non-reflecting boundary conditions. J. Comput. Phys. 82, 172-192 (1989).
10. Vinogradov I.M. Mathematical Encyclopedia, Vol. 2, 1977, P. 486-488 ("Radiation conditions").
11. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. M.: Nauka, 1981. P. 441.
12. Nikiforov A.F., Uvarov V.B. Special functions of mathematical physics. M: Mir, 1979. P. 79.
13. G.A. Korn, T.M. Korn. Mathematical handbook for scientists and engineers. McGraw Hill Book Company, NY, 1968. Translated M.: Nauka, 1970. P. 673, formulas (21.8-62).
14. Janke E., Emde F., Lesh F. Special functions. M.: Nauka, 1964. P. 158.
15. Janke E., Emde F., Lesh F. Special functions. M.: Nauka, 1964. P. 166.
16. Campe de Ferrier J., Campbell R., Petio G., Vogel T. Functions of Mathematical Physics. M.: GIF-ML, 1963. P. 56.
17. Kuznetsov D.S. Special functions. M.: Higher school, 1962. P. 241 - 242.
18. Vinogradov I.M. Mathematical Encyclopedia, Vol. 1, 1977. P. 858, ("Hankel functions").
19. Lebedev N.N. Special functions and their applications. ML.: GIF-ML, 1963. P. 139.
20. Janke E., Emde F., Lesh F. Special functions. M.: Nauka, 1964. P. 165.
21. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and Series, Vol. 3. M.: Fizmatlit, 2003. P. 339.
22. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products. M.: GIF-ML, 1963. P. 1043.
23. Vinogradov I.M. Mathematical Encyclopedia, Vol. 1, 1977. P. 858.
24. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. M.: Nauka, 1981. P. 345.
25. Vinogradov I.M. Mathematical Encyclopedia, Vol. 1, 1977. P. 855.
26. J. Descloux. Metode des elements finis. Lausanne, Suisse, 1973. Translated M.: Mir, 1976.
27. O.C. Zienkiewicz, K. Morgan. Finite elements and approximation, NY, 1983.

# ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ

**Садыгов М.А.**

доктор физико-математических наук  
Бакинский Государственный Университет

**Садыгов И.М.**

научный сотрудник  
Институт Экономики

## ON AN EXTREMAL PROBLEM FOR DISCRETE INCLUSION WITH CONSTRAINT

**Sadygov M.,**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences  
Baku State University*

**Sadygov I.**

*research assistant  
Institute of Economics*

DOI: [10.5281/zenodo.8019723](https://doi.org/10.5281/zenodo.8019723)

### **Аннотация**

В работе получены необходимые и достаточные условия экстремума первого и второго порядка в задаче оптимального управления дискретными включениями.

### **Abstract**

In work necessary and sufficient conditions for an extremum of the first and second order in the problem of optimal control of discrete inclusions are obtained.

**Ключевые слова:** дискретное включение, множество, оптимальная траектория, банахово пространство.

**Keywords:** discrete inclusion, set, optimal trajectory, Banach space.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Работа состоит из пяти пунктов. В п. 1 рассмотрены исчисления касательных и нормальных конусов пересечения множеств. Исчисление касательных и нормальных конусов для двух множеств рассмотрены в [1, 2]. В п. 2 получены необходимые условия экстремума в задаче оптимального управления дискретными включениями. Выпуклая и невыпуклая экстремальные задачи для дискретных включений в частном случае рассмотрены также в [3, 4] соответственно. В п. 3 получены необходимые условия экстремума в дискретной задаче оптимального управления. В п.4 и п.5 получены необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка в задаче оптимального управления дискретными включениями. В [5, 6], используя типа функции расстояния в классах  $\varphi - (\alpha, \beta, v, \delta)$ -локально липшицевых функций в точке, получены теоремы точного штрафа высокого порядка в задаче математического программирования, а также получены необходимые и достаточные условия экстремума высокого порядка при наличии ограничений. Отметим, что многие задачи математической экономики можно привести к таким задачам. В частности модель Неймана-Гейла является частным случаем этой задачи (см. [7, 8]).

### **1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ**

Пусть  $X$  банахово пространство, функция  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки  $x_0$ . Рассмотрим производную по направлению и субдифференциала Кларка [1, с.32, с.34]

$$h^0(x_0; x) = \lim_{z \rightarrow x_0, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (h(z + \lambda x) - h(z)),$$

$$\partial h(x_0) = \{p \in X^* : h^0(x_0; x) \geq \langle p, x \rangle \text{ при } x \in X\}.$$

Если  $C \subset X$  и  $d_C(x) = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}$ , то положим (см.[1, с.54])

$$T_C(x_0) = \{x \in X : d_C^0(x_0; x) = 0\}, N_C(x_0) = \{p \in X^* : \langle p, x \rangle \leq 0 \text{ при } x \in T_C(x_0)\}.$$

Если  $C \subset X$  выпуклое множество, то  $T_C(x_0) = \text{cl} \bigcup_{\lambda > 0} \frac{C - x_0}{\lambda}$ .

Вектор  $v \in X$  называется гиперкасательной к множеству  $C$  в точке  $x \in C$ , если для некоторого  $\varepsilon > 0$  следует, что  $y + tw \in C$  для всех  $y \in (x + \varepsilon B) \cap C$ ,  $w \in v + \varepsilon B$ ,  $t \in (0, \varepsilon)$  (см.[1, с.59]). Обозначим через  $I_C(x)$  множество всех гиперкасательных векторов к  $C$  в точке  $x$ . Из следствия 1 теоремы

2.5.7[1, с.69] следует, что если  $C$  замкнутое подмножество в  $R^n$ , то множество гиперкасательных к  $C$  в  $x$  совпадает с  $\text{int } T_C(x)$ . Если  $I_C(x) \neq \emptyset$ , то из теоремы 2.4.8[1, с.59] следует, что  $I_C(x) = \text{int } T_C(x)$

**Лемма 1.** Если  $X$ -банахово пространство,  $C_i \subset X$  при  $i = 1, \dots, k$ , где  $k \geq 2$ ,  $\bar{w} \in C = \bigcap_{i=1}^k C_i$  и  $T_{C_i}(\bar{w}) \cap I_{C_2}(\bar{w}) \cap \dots \cap I_{C_k}(\bar{w}) \neq \emptyset$ , то

$$T_C(\bar{w}) \supset \bigcap_{i=1}^k T_{C_i}(\bar{w}), \quad N_C(\bar{w}) \subset \sum_{i=1}^k N_{C_i}(\bar{w}).$$

**Доказательство.** При  $k = 2$  из следствия 2 теоремы 2.9.8 [1, с.100] следует, что

$$T_{C_1}(\bar{w}) \cap T_{C_2}(\bar{w}) \subset T_{C_1 \cap C_2}(\bar{w}) \text{ и } N_{C_1 \cap C_2}(\bar{w}) \subset N_{C_1}(\bar{w}) + N_{C_2}(\bar{w}).$$

Предположим, что  $T_{\bigcap_{i=1}^s C_i}(\bar{w}) \supset \bigcap_{i=1}^s T_{C_i}(\bar{w})$  и  $N_{\bigcap_{i=1}^s C_i}(\bar{w}) \subset \sum_{i=1}^s N_{C_i}(\bar{w})$  верно, т.е. лемма верна при  $k = s$ , где  $s \geq 2$ . Покажем, что  $T_{\bigcap_{i=1}^{s+1} C_i}(\bar{w}) \supset \bigcap_{i=1}^{s+1} T_{C_i}(\bar{w})$  и  $N_{\bigcap_{i=1}^{s+1} C_i}(\bar{w}) \subset \sum_{i=1}^{s+1} N_{C_i}(\bar{w})$  также верно, т.е. покажем, что лемма верна также при  $k = s + 1$ . Так как  $(\bigcap_{i=2}^{s+1} I_{C_i}(\bar{w})) \cap T_{C_1}(\bar{w}) \neq \emptyset$  и

$$T_{\bigcap_{i=1}^s C_i}(\bar{w}) \cap I_{C_{s+1}}(\bar{w}) \supset \bigcap_{i=1}^s T_{C_i}(\bar{w}) \cap I_{C_{s+1}}(\bar{w}) \supset \bigcap_{i=2}^{s+1} I_{C_i}(\bar{w}) \cap T_{C_1}(\bar{w}),$$

то отсюда следует, что  $T_{\bigcap_{i=1}^{s+1} C_i}(\bar{w}) \cap I_{C_{s+1}}(\bar{w}) \neq \emptyset$ . Поэтому

$$T_{\bigcap_{i=1}^{s+1} C_i}(\bar{w}) \supset T_{\bigcap_{i=1}^s C_i}(\bar{w}) \cap T_{C_{s+1}}(\bar{w}) \supset \bigcap_{i=1}^s T_{C_i}(\bar{w}) \cap T_{C_{s+1}}(\bar{w}) = \bigcap_{i=1}^{s+1} T_{C_i}(\bar{w}),$$

$$N_{\bigcap_{i=1}^{s+1} C_i}(\bar{w}) \subset N_{\bigcap_{i=1}^s C_i}(\bar{w}) + N_{C_{s+1}}(\bar{w}) \subset \sum_{i=1}^s N_{C_i}(\bar{w}) + N_{C_{s+1}}(\bar{w}).$$

Лемма доказана.

Используя следствия 2 и 3 теоремы 2.9.8 [1, с. 100] аналогично лемме 1 доказывается следующая лемма.

**Лемма 2.** Если  $C_i \subset R^n$  при  $i = 1, \dots, k$ ,  $C_i$  замкнутые множества при  $i = 2, \dots, k$ , где  $k \geq 2$ ,  $\bar{w} \in C = \bigcap_{i=1}^k C_i$  и  $T_{C_i}(\bar{w}) \cap \text{int } T_{C_2}(\bar{w}) \cap \dots \cap \text{int } T_{C_k}(\bar{w}) \neq \emptyset$ , то

$$T_C(\bar{w}) \supset \bigcap_{i=1}^k T_{C_i}(\bar{w}), \quad N_C(\bar{w}) \subset \sum_{i=1}^k N_{C_i}(\bar{w}).$$

Положим  $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ . Пусть  $X$  и  $Y$  банаховы пространства,  $F: X \rightarrow Y$ . Значение отображения  $F'(\bar{x})$  на векторе  $x \in X$  обозначается через  $F'(\bar{x})(x)$  или  $\langle F'(\bar{x}), x \rangle$ .

**Лемма 3.** Пусть  $X$  и  $Y$  банаховы пространства,  $F: X \rightarrow Y$ , производная  $F'(z)$  в смысле Фреше существует при  $z \in x_0 + 2\delta B$  и найдется  $L > 0$  такое, что  $\|F'(u) - F'(v)\| \leq L \|u - v\|^\alpha$  при  $u, v \in x_0 + 2\delta B$ , где  $0 < \alpha \leq 1$ . Тогда

$$\|F(x_0 + x + y) - F(x_0 + x) - F'(x_0)(y)\| \leq L \|y\| (\|x\|^\alpha + \|y\|^\alpha)$$

при  $x, y \in \delta B$ .

**Доказательство.** Если  $x, y \in \delta B$ , то по формуле Лагранжа (см.[9, с.160]) имеем, что

$$\begin{aligned} & \|F(x_0 + x + y) - F(x_0 + x) - F'(x_0)(y)\| = \\ & = \|F(x_0 + x + y) - F(x_0 + x) - F'(x_0)(y) - F'(x_0 + x)(y) + F'(x_0 + x)(y)\| \leq \\ & \leq \|F'(x_0 + x)(y) - F'(x_0)(y)\| + \|F(x_0 + x + y) - F(x_0 + x) - F'(x_0 + x)(y)\| \leq \\ & \leq \|F'(x_0 + x) - F'(x_0)\| \|y\| + \sup_{\xi \in [x_0 + x, x_0 + x + y]} \|F'(\xi) - F'(x_0 + x)\| \|y\| \leq L \|y\| (\|y\|^\alpha + \|x\|^\alpha). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

## 2. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Пусть  $Z$ -произвольное множество. Обозначим  $P(Z)$  множество всех подмножеств  $Z$ . Пусть  $X_0, X_1, \dots, X_T$  банаховы пространства, где  $T$  натуральное число,  $a_t : X_t \rightarrow P(X_{t+1})$  многозначное отображение, где  $t = 0, 1, \dots, T-1$ . Положим  $\text{gr } a_t = \{(x, z) \in X_t \times X_{t+1} : z \in a_t(x)\}$ , где  $t = 0, 1, \dots, T-1$ .

Обозначим  $X = X_0 \times X_1 \times \dots \times X_T$  с нормой  $\|w\| = \|x_0\| + \|x_1\| + \dots + \|x_T\|$ , где  $w = (x_0, x_1, \dots, x_T) \in X$ . Пусть  $q : X \rightarrow R$ ,  $f_i : X \rightarrow R$  при  $i = 1, \dots, m$ ,  $g_j : X \rightarrow R$  при  $j = 1, \dots, v$ , где  $m, v \in N = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\xi \subset X_0$ ,  $C \subset X_T$ .

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления с дискретным временем: минимизировать функцию

$$q(w) = q(x_0, x_1, \dots, x_T) \quad (1)$$

при условиях

$$x_{t+1} \in a_t(x_t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1 \quad (2)$$

$$x_0 \in \xi, \quad x_T \in C, \quad (3)$$

$$f_i(w) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad g_j(w) = 0, \quad j = 1, \dots, v. \quad (4)$$

Множество решений задачи (2)-(4) обозначим через  $\Omega$ . Траектория  $\bar{w} \in \Omega$  называется решением задачи (1)-(4), если  $q(\bar{w}) \leq q(w)$  при  $w \in \Omega$ .

В  $X$  рассмотрим множества:

$$M_{-1} = \{(x_0, x_1, x_2, \dots, x_T) \in X : x_0 \in \xi\},$$

$$M_t = \{(x_0, x_1, \dots, x_t, x_{t+1}, \dots, x_T) \in X : (x_t, x_{t+1}) \in \text{gr } a_t\}, \quad t = 0, 1, \dots, T-1,$$

$$M_T = \{(x_0, x_1, x_2, \dots, x_T) \in X : x_T \in C\}.$$

Через  $M$  обозначим множество траекторий задачи (2), (3). Легко проверяется, что  $M = \bigcap_{t=-1}^T M_t$ . Поэтому если  $\xi, C$  и  $\text{gr } a_t$  замкнутые множества при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , то  $M$  - замкнутое множество.

Из следствия теоремы 2·4·5 [1] имеем, что

$$T_{M_{-1}}(\bar{w}) = \{(x_0, x_1, x_2, \dots, x_T) \in X : x_0 \in T_\xi(\bar{x}_0)\},$$

$$T_{M_t}(\bar{w}) = \{(x_0, x_1, \dots, x_t, x_{t+1}, \dots, x_T) \in X : (x_t, x_{t+1}) \in T_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})\}, \quad t = 0, 1, \dots, T-1,$$

$$T_{M_T}(\bar{w}) = \{(x_0, x_1, x_2, \dots, x_T) \in X : x_T \in T_C(\bar{x}_T)\}.$$

Поэтому

$$N_{M_{-1}}(\bar{w}) = \{(x_0^*, 0, \dots, 0) \in X : x_0^* \in N_\xi(\bar{x}_0)\},$$

$$N_{M_t}(\bar{w}) = \{(0, \dots, 0, x_t^*, x_{t+1}^*, 0, \dots, 0) \in X^* : (x_t^*, x_{t+1}^*) \in N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})\}, \quad t = 0, 1, \dots, T-1,$$

$$N_{M_T}(\bar{w}) = \{(0, 0, \dots, x_T^*) \in X : x_T^* \in N_C(\bar{x}_T)\}.$$

Положив  $\text{gr } b_t = I_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ , определим многозначное отображение  $b_t : X_t \rightarrow P(X_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ . Тогда условие  $(\bigcap_{t=0}^T I_{M_t}(\bar{w})) \cap T_{M_{-1}}(\bar{w}) \neq \emptyset$  эквивалентно тому, что задачи

$$z_{t+1} \in b_t(z_t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1 \quad (5)$$

$$z_0 \in T_\xi(\bar{x}_0), \quad z_T \in I_C(\bar{x}_T) \quad (6)$$

имеют решение.

Обозначим  $f = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $g = (g_1, \dots, g_v)$ ,  $R_+ = \{\alpha \in R : \alpha \geq 0\}$  и

$$R_+^m = \{r = (r_1, \dots, r_m) \in R^m : r_i \geq 0 \text{ при } i = 1, \dots, m\}.$$

**Теорема 1.** Если  $\bar{w} \in M$  решение задачи (1)-(4),  $I_C(\bar{x}_T)$  и  $I_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  непусты при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , функции  $q : X \rightarrow R$ ,  $f_i : X \rightarrow R$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $g_j : X \rightarrow R$  при  $j = 1, \dots, v$  удовлетворяют условию Липшица в окрестности точки  $\bar{w}$ ,  $M$  замкнутое множество, то существуют  $(\lambda, r, s) \in R_+ \times R_+^m \times R^v$ , где  $(\lambda, r, s) \neq 0$ ,  $\lambda = 0$  или  $\lambda = 1$ ,  $\langle r, f(\bar{w}) \rangle = 0$ , векторы

$x_0^*(-1) \in N_\xi(\bar{x}_0)$ ,  $(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $x_T^*(T) \in N_C(\bar{x}_T)$  и  $\mu \in \{0, -1\}$  такие, что

$$(x_0^*(-1) + x_0^*(0), x_1^*(0) + x_1^*(1), \dots, x_T^*(T-1) + x_T^*(T)) \in \mu \partial(\lambda q(\cdot) + \langle r, f(\cdot) \rangle + \langle s, g(\cdot) \rangle)(\bar{w}),$$

при этом  $x_t^*(t-1)$  при  $t = 0, 1, \dots, T$  и  $\mu$  одновременно не равны нулю.

**Доказательство.** Легко проверяется, что

$$\text{int } T_{M_t}(\bar{w}) = \{(x_0, x_1, \dots, x_t, x_{t+1}, \dots, x_T) \in X : (x_t, x_{t+1}) \in \text{int } T_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})\}$$

при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , и

$$\text{int } T_{M_T}(\bar{w}) = \{(x_0, \dots, x_t, x_{t+1}, \dots, x_T) \in X : x_T \in \text{int } T_C(\bar{x}_T)\}.$$

Если  $(\bigcap_{t=0}^T \text{int } T_{M_t}(\bar{w})) \cap T_{M_{-1}}(w) = \emptyset$ , то по лемме 5.11 [10, с.37] найдутся линейные функционалы

$w_t^* \in N_{M_t}(\bar{w})$  при  $t = -1, 0, 1, \dots, T$ , не все равные нулю, такие, что  $w_{-1}^* + w_0^* + w_1^* + \dots + w_T^* = 0$ .

Далее по следствию теоремы 2.4.5[1] имеем, что  $w_{-1}^* \in N_{M_{-1}}(\bar{w}) = (N_\xi(\bar{x}_0), 0, \dots, 0)$ ,

$w_t^* \in N_{M_t}(\bar{w}) = (0, \dots, 0, N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}), 0, \dots, 0)$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,

$w_T^* \in N_{M_T}(\bar{w}) = (0, 0, \dots, 0, N_C(\bar{x}_T))$ , т.е.  $w_{-1}^* = (x_0^*(-1), 0, \dots, 0)$ , где  $x_0^*(-1) \in N_\xi(\bar{x}_0)$ ,

$w_t^* = (0, \dots, 0, x_t^*(t), x_{t+1}^*(t), 0, \dots, 0)$ , где  $(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,

$w_T^* = (0, 0, \dots, 0, x_T^*(T))$ , где  $x_T^*(T) \in N_C(\bar{x}_T)$ . Тогда имеем, что  $x_t^*(t-1) + x_t^*(t) = 0$  при  $t = 0, 1, 2, \dots, T$ . Поэтому  $x_t^*(t-1)$  при  $t = 0, 1, \dots, T$  одновременно не равны нулю. Тогда получим, что при  $\mu = 0$  удовлетворяется утверждение теоремы 1.

Пусть  $(\bigcap_{t=0}^T I_{M_t}(\bar{w})) \cap T_{M_{-1}}(\bar{w}) \neq \emptyset$ . По теореме 10.47[11] существуют  $\lambda \geq 0$ ,  $r \in R_+^m$  и  $s \in R^\nu$ ,

где  $(\lambda, r, s) \neq 0$ ,  $\lambda = 0$  или  $\lambda = 1$ ,  $\langle r, f(\bar{w}) \rangle = 0$ , такие, что  $0 \in \partial(\lambda q(\cdot) + \langle r, f(\cdot) \rangle + \langle s, g(\cdot) \rangle)(\bar{w}) + N_M(\bar{w})$ . Из леммы 1 следует, что

$$N_M(\bar{w}) \subset \bigcap_{t=-1}^T N_{M_t}(\bar{w}). \text{ Поэтому имеем, что}$$

$$0 \in \partial(\lambda q(\cdot) + \langle r, f(\cdot) \rangle + \langle s, g(\cdot) \rangle)(\bar{w}) + N_{M_{-1}}(\bar{w}) + N_{M_0}(\bar{w}) + \dots + N_{M_T}(\bar{w}).$$

Тогда существуют  $w_t^* \in N_{M_t}(\bar{w})$  при  $t = -1, 0, 1, \dots, T$ , такие, что

$w_{-1}^* + w_0^* + \dots + w_T^* \in -\partial(\lambda q(\cdot) + \langle r, f(\cdot) \rangle + \langle s, g(\cdot) \rangle)(\bar{w})$ . Поэтому найдутся  $x_0^*(-1) \in N_\xi(\bar{x}_0)$ ,

$(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$  и  $x_T^*(T) \in N_C(\bar{x}_T)$  такие, что

$$(x_0^*(-1) + x_0^*(0), x_1^*(0) + x_1^*(1), \dots, x_T^*(T-1) + x_T^*(T)) \in -\partial(\lambda q(\cdot) + \langle r, f(\cdot) \rangle + \langle s, g(\cdot) \rangle)(\bar{w}).$$

Теорема доказана.

Если выполняются условия теоремы 1,  $\bar{w} \in M$  решение задачи (1)-(4) и имеют решение задачи (5),(6), то при  $\mu = -1$  удовлетворяется утверждение теоремы 1. Кроме того из  $\langle r, f(\bar{w}) \rangle = 0$  и  $r \in R_+^m$  следует, что  $r_i f_i(\bar{w}) = 0$  при  $i = 1, \dots, m$ .

Пусть  $q(\cdot, t) : X_t \rightarrow R$ ,  $f_i(\cdot, t) : X_t \rightarrow R$  при  $i = 1, \dots, m$ ,  $g_j(\cdot, t) : X_t \rightarrow R$  при  $j = 1, \dots, v$ , где  $t = 0, 1, \dots, T$ , и  $q(w) = \sum_{t=0}^T q(x_t, t)$ ,  $f_i(w) = \sum_{t=0}^T f_i(x_t, t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $g_j(w) = \sum_{t=0}^T g_j(x_t, t)$ ,  $j = 1, \dots, v$ .

Обозначим  $f(\cdot, t) = (f_1(\cdot, t), \dots, f_m(\cdot, t))$  и  $g(\cdot, t) = (g_1(\cdot, t), \dots, g_v(\cdot, t))$  при  $t = 0, 1, \dots, T$ .

Из теоремы 1 следует следующее следствие.

**Следствие 1.** Если  $\bar{w} \in M$  решение задачи (1)-(4),  $I_C(\bar{x}_T)$  и  $I_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  непусты при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , функции  $q(\cdot, t) : X_t \rightarrow R$ ,  $f_i : X \rightarrow R$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $g_j : X \rightarrow R$  при  $j = 1, \dots, v$  удовлетворяют условию Липшица в окрестности точки  $\bar{x}_t$  при  $t = 0, \dots, T$ ,  $M$  замкнутое множество, то существуют  $(\lambda, r, s) \in R_+ \times R_+^m \times R^\nu$ , где  $(\lambda, r, s) \neq 0$ ,  $\lambda = 0$  или  $\lambda = 1$ ,  $\langle r, f(\bar{w}) \rangle = 0$ ,

векторы  $x_0^*(-1) \in N_\xi(\bar{x}_0)$ ,  $(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $x_T^*(T) \in N_C(\bar{x}_T)$  и  $\mu \in \{0, -1\}$  такие, что

$$x_t^*(t-1) + x_t^*(t) \in \mu \partial(\lambda q(\cdot, t) + \langle r, f(\cdot, t) \rangle + \langle s, g(\cdot, t) \rangle)(\bar{x}_t)$$

при  $t = 0, 1, \dots, T$ , при этом  $x_t^*(t-1)$  при  $t = 0, 1, \dots, T$  и  $\mu$  одновременно не равны нулю.

Отметим, что если  $X_t = R^{n(t)}$  при  $t = 0, 1, \dots, T$ , то  $X = R^n$ , где

$$n = n(0) + n(1) + \dots + n(T).$$

Используя лемму 2 аналогично теореме 1 доказывается следующая теорема.

**Теорема 2.** Если  $X_t = R^{n(t)}$ , где  $n(t) \in N$  при  $t = 0, 1, \dots, T$ ,  $\bar{w} \in M$  решение задачи (1)-(4),  $\xi$ ,  $C$  и  $\text{gr } a_t$  замкнутые множества при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $\text{int } T_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) \neq \emptyset$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $\text{int } T_C(\bar{x}_T) \neq \emptyset$ , функции  $q: R^n \rightarrow R$ ,  $f_i: R^n \rightarrow R$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $g_j: R^n \rightarrow R$  при  $j = 1, \dots, v$  удовлетворяют условию Липшица в окрестности точки  $\bar{W}$ , то существуют  $(\lambda, r, s) \in R_+ \times R_+^m \times R^v$ , где  $(\lambda, r, s) \neq 0$ ,  $\lambda = 0$  или  $\lambda = 1$ ,  $\langle r, f(\bar{W}) \rangle = 0$ , векторы  $x_0^*(-1) \in N_\xi(\bar{x}_0)$ ,  $(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $x_T^*(T) \in N_C(\bar{x}_T)$  и  $\mu \in \{0, -1\}$  такие, что

$$(x_0^*(-1) + x_0^*(0), x_1^*(0) + x_1^*(1), \dots, x_T^*(T-1) + x_T^*(T)) \in \mu \partial(\lambda q(\cdot) + \langle r, f(\cdot) \rangle + \langle s, g(\cdot) \rangle)(\bar{w}),$$

при этом  $x_t^*(t-1)$  при  $t = 0, 1, \dots, T$  и  $\mu$  одновременно не равны нулю.

Рассмотрим минимизацию функции  $q$  среди всех решений задачи

$$x_{t+1} \in a_t(x_t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1 \quad (7)$$

$$x_0 \in \xi, \quad x_T \in C \quad (8)$$

Через  $M$  обозначим множество траекторий задачи (7),(8).

Из теоремы 1 следует следующее следствие.

**Следствие 2.** Если вектор  $\bar{w} \in M$  минимизирует функцию  $q$  среди всех решений задачи (7),(8),  $I_C(\bar{x}_T)$  и  $I_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  не пусты при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $M$  замкнутое множество и функция  $q: X \rightarrow R$  удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки  $\bar{W}$ , то существуют векторы  $x_0^*(-1) \in N_\xi(\bar{x}_0)$ ,  $(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $x_T^*(T) \in N_C(\bar{x}_T)$  и  $\mu \in \{0, -1\}$  такие, что

$$(x_0^*(-1) + x_0^*(0), x_1^*(0) + x_1^*(1), \dots, x_T^*(T-1) + x_T^*(T)) \in \mu \partial q(\bar{w}),$$

при этом  $x_t^*(t-1)$  при  $t = 0, 1, \dots, T$  и  $\mu$  одновременно не равны нулю.

**Теорема 3.** Если вектор  $\bar{w} \in M$  минимизирует функцию  $q$  среди всех решений задачи (7),(8),  $\text{gr } a_t$  выпуклое множество при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $\xi$  и  $C$  выпуклые множества,  $\text{int } \text{gr } a_t \neq \emptyset$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $\text{int } C \neq \emptyset$  и выпуклая функция  $q: X \rightarrow R$  непрерывна в точке  $\bar{W}$ , то существуют векторы  $x_0^*(-1) \in N_\xi(\bar{x}_0)$ ,  $(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $x_T^*(T) \in N_C(\bar{x}_T)$  и  $\mu \in \{0, -1\}$  такие, что

$$(x_0^*(-1) + x_0^*(0), x_1^*(0) + x_1^*(1), \dots, x_T^*(T-1) + x_T^*(T)) \in \mu \partial q(\bar{w}),$$

при этом  $x_t^*(t-1)$  при  $t = 0, 1, \dots, T$  и  $\mu$  одновременно не равны нулю.

**Доказательство.** Положив  $\delta_M(w) = \begin{cases} 0: w \in M, \\ +\infty: w \notin M \end{cases}$  имеем, что нахождение минимума  $q(w)$  на

множестве  $M$  эквивалентно нахождению минимума функции  $q(w) + \delta_M(w)$  на пространстве  $X$ . Так как вектор  $\bar{w} \in M$  минимизирует функцию  $q(w)$  в  $M$ , то по предложению 4.3.4[2, с.188] и теореме Моро-Рокафеллара [12, с.59] получим

$$0 \in \partial(q(\cdot) + \delta_M(\cdot))(\bar{w}) = \partial q(\bar{w}) + \partial \delta_M(\bar{w}) = \partial q(\bar{w}) + N_M(\bar{w}).$$

Если  $(\bigcap_{t=0}^T \text{int } M_t) \cap M_{-1} \neq \emptyset$ , то из предложения 4.3.1[12, c.217] следует, что  $N_M(\bar{w}) = N_{M_{-1}}(\bar{w}) + N_{M_0}(\bar{w}) + \dots + N_{M_T}(\bar{w})$ . Поэтому  $0 \in \partial q(\bar{w}) + N_M(\bar{w}) = \partial q(\bar{w}) + N_{M_{-1}}(\bar{w}) + N_{M_0}(\bar{w}) + \dots + N_{M_T}(\bar{w})$ .

Тогда аналогично доказательству теоремы 1 существуют векторы  $x_0^*(-1) \in N_\xi(\bar{x}_0)$ ,  $(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$  и  $x_T^*(T) \in N_C(\bar{x}_T)$  такие, что  $(x_0^*(-1) + x_0^*(0), x_1^*(0) + x_1^*(1), \dots, x_T^*(T-1) + x_T^*(T)) \in -\partial q(\bar{w})$ .

Если  $(\bigcap_{t=0}^T \text{int } M_t) \cap M_{-1} = \emptyset$ , то по предложению 4.3.3[12, c.218] существуют линейные функционалы  $w_t^* \in N_{M_t}(\bar{w})$  при  $t = -1, 0, 1, \dots, T$ , не все равные нулю, такие, что  $w_{-1}^* + w_0^* + w_1^* + \dots + w_T^* = 0$ . Тогда аналогично доказательству теоремы 1 существуют векторы  $x_0^*(-1) \in N_\xi(\bar{x}_0)$ ,  $(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$  и  $x_T^*(T) \in N_C(\bar{x}_T)$  такие, что  $x_t^*(t-1) + x_t^*(t) = 0$  при  $t = 0, 1, 2, \dots, T$ . Поэтому  $x_t^*(t-1)$  при  $t = 0, 1, \dots, T$  одновременно не равны нулю. Получим, что при  $\mu = 0$  удовлетворяется утверждение теоремы 3. Теорема доказана.

Пусть  $Z$  банахово пространство,  $G \subset Z$ . Через  $B_G(\bar{z})$  обозначим контингентный конус [2, c.396] или конус Булигана к множеству  $G$  в точке  $\bar{z} \in G$ . Отметим, что  $z \in B_G(\bar{z})$  в том и только в том случае, если существуют последовательности строго положительных чисел  $t_k$  и элементов  $z_k \in Z$ , такие, что  $t_k \downarrow 0$ ,  $z_k \rightarrow z$  и  $\bar{z} + t_k z_k \in G$  при  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Если  $B_G(\bar{z}) = T_G(\bar{z})$ , то множество  $G$  называется регулярным в точке  $\bar{z}$  [1, c.57].

Предположим, что множество  $\text{gra}_t$  регулярно в точке  $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , т.е.  $T_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) = B_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , и пусть  $a_t(\bar{x}_t)$  выпуклое множество. Так как  $\{\bar{x}_t\} \times a_t(\bar{x}_t) \subset \text{gra}_t$ , то по предложениям 7.1.5 и 7.6.1 [2, c.398, c.427] имеем, что  $\{\lambda(0, y - \bar{x}_{t+1}) : y \in a_t(\bar{x}_t), \lambda \geq 0\} \subset T_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ .

Так как  $(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ , то  $\langle (x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)), (x, y) \rangle \leq 0$  при  $(x, y) \in T_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ , где  $t = 0, 1, \dots, T-1$ . Поэтому  $\langle x_{t+1}^*(t), y - \bar{x}_{t+1} \rangle \leq 0$  при  $y \in a_t(\bar{x}_t)$ , т.е.  $\langle x_{t+1}^*(t), y \rangle \leq \langle x_{t+1}^*(t), \bar{x}_{t+1} \rangle$  при  $y \in a_t(\bar{x}_t)$ . Отсюда следует, что

$$\max\{\langle x_{t+1}^*(t), y \rangle : y \in a_t(\bar{x}_t)\} = \langle x_{t+1}^*(t), \bar{x}_{t+1} \rangle \quad (9)$$

при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ .

**Замечание 1.** Если  $\{\lambda(0, y - \bar{x}_{t+1}) : y \in a_t(\bar{x}_t), \lambda \geq 0\} \subset T_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , то равенство (9) остается также верной.

### 3. ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть  $X_0, X_1, \dots, X_T$  и  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{T-1}$  банаховы пространства, где  $T$  натуральное число,  $U_t \subset Y_t$ ,  $F_t : X_t \times U_t \rightarrow X_{t+1}$  отображение, где  $t = 0, 1, \dots, T-1$ . Обозначим  $X = X_0 \times X_1 \times \dots \times X_T$ ,  $w = (x_0, x_1, \dots, x_T) \in X$ . Пусть  $q : X \rightarrow R$ ,  $f_i : X \rightarrow R$  при  $i = 1, \dots, m$ ,  $g_j : X \rightarrow R$  при  $j = 1, \dots, v$ , где  $m, v \in N$ ,  $\xi \subset X_0$ ,  $C \subset X_T$ .

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления с дискретным временем: минимизировать функцию

$$q(w) = q(x_0, x_1, \dots, x_T) \quad (10)$$

при условиях

$$x_{t+1} = F_t(x_t, u_t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (11)$$

$$x_0 \in \xi, \quad x_T \in C, \quad (12)$$

$$f_i(w) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad g_j(w) = 0, \quad j = 1, \dots, v. \quad (13)$$

где  $u_t \in U_t$ .

Через  $M$  обозначим множество траекторий задачи (11), (12). Предположим, что вектор  $\bar{w} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_T)$  минимизирует функцию  $q$  среди всех решений задачи (11)-(13). Пусть  $\bar{u}_t \in U_t$  такое, что  $\bar{x}_{t+1} = F_t(\bar{x}_t, \bar{u}_t)$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ . Если  $x_t \in X_t$ , то положим  $a_t(x_t) = F_t(x_t, U_t)$  и  $gra_t = \{(x_t, x_{t+1}) \in X_t \times X_{t+1} : x_{t+1} \in a_t(x_t)\}$ , где  $t = 0, 1, \dots, T-1$ .

Рассмотрим задачу минимизации функции

$$q(w) = q(x_0, x_1, \dots, x_T) \quad (14)$$

среди всех решений задачи

$$x_{t+1} \in a_t(x_t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1 \quad (15)$$

$$x_0 \in \xi, \quad x_T \in C \quad (16)$$

$$f_i(w) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad g_j(w) = 0, \quad j = 1, \dots, v. \quad (17)$$

Множество решений задачи (15)-(17) обозначим через  $\Omega$ . Траектория  $\bar{w} \in \Omega$  называется решением задачи (14)-(17), если  $q(\bar{w}) \leq q(w)$  при  $w \in \Omega$ .

Ясно, что минимизация функции  $q$  при ограничениях (11)-(13) эквивалентна минимизации функции  $q$  при ограничениях (15)-(17). Так как задача (14)-(17) является частным случаем задачи (1)-(4), то для задачи (14)-(17) также верны аналоги теоремы 1 и теоремы 2. Для простоты, используя теорему 2, получим необходимое условие экстремума для задачи (10)-(13) в виде принципа максимума.

Обозначим  $H_t(x_t, u_t, x_{t+1}^*) = \langle x_{t+1}^*, F_t(x_t, u_t) \rangle$ , где  $x_{t+1}^* \in X_{t+1}^*$ .

**Теорема 4.** Если  $X_t = R^{n(t)}$ , где  $n(t) \in N$  при  $t = 0, 1, \dots, T$ ,  $\bar{w} \in M$  решение задачи (10)-(13),  $\xi$ ,  $C$  и  $gr a_t$  замкнутые множества при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $int T_{gra_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) \neq \emptyset$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $int T_C(\bar{x}_T) \neq \emptyset$ , функции  $q: R^n \rightarrow R$ ,  $f_i: R^n \rightarrow R$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $g_j: R^n \rightarrow R$  при  $j = 1, \dots, v$  удовлетворяют условию Липшица в окрестности точки  $\bar{w}$ , множество  $gra_t$  регулярно в точке  $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , вектор-функция  $F_t(\cdot, \bar{u}_t)$  непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $\bar{x}_t$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $a_t(\bar{x}_t) = F_t(\bar{x}_t, U_t)$  выпуклое множество и  $\bar{u}_t \in U_t$  такое, что  $\bar{x}_{t+1} = F_t(\bar{x}_t, \bar{u}_t)$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , то существуют  $(\lambda, r, s) \in R_+ \times R_+^m \times R^v$ , где  $(\lambda, r, s) \neq 0$ ,  $\lambda = 0$  или  $\lambda = 1$ ,  $\langle r, f(\bar{w}) \rangle = 0$ , векторы  $x_0^*(-1) \in N_\xi(\bar{x}_0)$ ,  $x_t^*(t) = -\nabla_{x_t} H_t(\bar{x}_t, \bar{u}_t, x_{t+1}^*(t))$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $x_T^*(T) \in N_C(\bar{x}_T)$  и  $\mu \in \{0, -1\}$  такие, что  $\max\{H_t(\bar{x}_t, u_t, x_{t+1}^*(t)) : u_t \in U_t\} = H_t(\bar{x}_t, \bar{u}_t, x_{t+1}^*(t)), \quad t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $(x_0^*(-1) + x_0^*(0), x_1^*(0) + x_1^*(1), \dots, x_T^*(T-1) + x_T^*(T)) \in \mu \partial(\lambda q(\cdot) + \langle r, f(\cdot) \rangle + \langle s, g(\cdot) \rangle)(\bar{w})$ , при этом  $x_t^*(t-1)$  при  $t = 0, 1, \dots, T$  и  $\mu$  одновременно не равны нулю.

**Доказательство.** По теореме 2 существуют  $(\lambda, r, s) \in R_+ \times R_+^m \times R^v$ , где  $(\lambda, r, s) \neq 0$ ,  $\lambda = 0$  или  $\lambda = 1$ ,  $\langle r, f(\bar{w}) \rangle = 0$ , векторы  $x_0^*(-1) \in N_\xi(\bar{x}_0)$ ,  $(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in N_{gra_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $x_T^*(T) \in N_C(\bar{x}_T)$  и  $\mu \in \{0, -1\}$  такие, что

$$(x_0^*(-1) + x_0^*(0), x_1^*(0) + x_1^*(1), \dots, x_T^*(T-1) + x_T^*(T)) \in \mu \partial(\lambda q(\cdot) + \langle r, f(\cdot) \rangle + \langle s, g(\cdot) \rangle)(\bar{w}),$$

при этом  $x_t^*(t-1)$  при  $t = 0, 1, \dots, T$  и  $\mu$  одновременно не равны нулю.

Так как множество  $gra_t$  регулярно в точке  $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , т.е.  $T_{gra_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) = B_{gra_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ ,  $\{\bar{x}_t\} \times a_t(\bar{x}_t) \subset gra_t$  и  $a_t(\bar{x}_t)$  выпуклые множества, то по предложению 7.1.5 и 7.6.1 [2, с.398, с.427] имеем

$$\{\lambda(0, y - \bar{x}_{t+1}) : y \in a_t(\bar{x}_t), \lambda \geq 0\} \subset T_{gra_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}).$$

Если  $(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , то  $\langle (x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)), (x, y) \rangle \leq 0$  при  $(x, y) \in T_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ . Поэтому  $\langle x_{t+1}^*(t), y - \bar{x}_{t+1} \rangle \leq 0$  при  $y \in a_t(\bar{x}_t)$ , т.е.  $\langle x_{t+1}^*(t), y \rangle \leq \langle x_{t+1}^*(t), \bar{x}_{t+1} \rangle$  при  $y \in a_t(\bar{x}_t)$ . Отсюда следует, что

$$\max\{\langle x_{t+1}^*(t), y \rangle : y \in a_t(\bar{x}_t)\} = \langle x_{t+1}^*(t), \bar{x}_{t+1} \rangle$$

при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ . Пусть  $\bar{u}_t \in U_t$  такое, что  $\bar{x}_{t+1} = F_t(\bar{x}_t, \bar{u}_t)$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ .

Тогда получим, что  $\max\{\langle x_{t+1}^*(t), F_t(\bar{x}_t, u_t) \rangle : u_t \in U_t\} = \langle x_{t+1}^*(t), F_t(\bar{x}_t, \bar{u}_t) \rangle$ . Поэтому

$$\max\{H_t(\bar{x}_t, u_t, x_{t+1}^*(t)) : u_t \in U_t\} = H_t(\bar{x}_t, \bar{u}_t, x_{t+1}^*(t)).$$

Если множество  $\text{gra}_t$  регулярно в точке  $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , то имеем, что  $B_{\text{gr}F_t(\cdot, \bar{u}_t)}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) \subset T_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ . Так как вектор-функция  $F_t(\cdot, \bar{u}_t)$  непрерывно дифференцируема в окрестности  $\bar{x}_t$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , то из [2, с.402] следует, что  $(v, w) \in B_{\text{gr}F_t(\cdot, \bar{u}_t)}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  тогда и только тогда когда  $w = \nabla_{x_t} F_t(\bar{x}_t, \bar{u}_t)v$ . Так как  $(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in N_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , то  $\langle x_t^*(t), v \rangle = \langle -x_{t+1}^*(t), \nabla_{x_t} F_t(\bar{x}_t, \bar{u}_t)v \rangle$  при  $v \in X_t$ . Отсюда следует, что  $x_t^*(t) = -\nabla_{x_t} H_t(\bar{x}_t, \bar{u}_t, x_{t+1}^*(t))$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ . Теорема доказана.

#### 4. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ПОРЯДКА $\beta$ , ГДЕ $1 < \beta \leq 2$

Для простоты найдем необходимое и достаточное условия порядка  $\beta$  для задачи минимизации функции  $q(x_0, x_1, \dots, x_T)$  среди всех решений задачи (7),(8), где  $1 < \beta \leq 2$ . Пусть  $X = X_0 \times X_1 \times \dots \times X_T$  банаово пространство. Через  $M$  обозначим множество траекторий задачи (7),(8). Положим  $B = \{w \in X : \|w\| \leq 1\}$ ,  $d_M^{1+\alpha}(w) = (d_M(w))^{1+\alpha}$ .

**Теорема 5.** Если функция  $q$  дифференцируема по Фреше в множестве  $\bar{W} + 2\delta B$  и найдется  $L > 0$  такое, что  $\|q'(u) - q'(v)\| \leq L\|u - v\|^\alpha$  при  $u, v \in \bar{W} + 2\delta B$ , где  $\delta > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , вектор  $\bar{W} \in M$  минимизирует функцию  $q$  среди всех решений задачи (7),(8),  $M \subset \bar{W} + \delta B$  и  $q'(\bar{W}) = 0$ , то для любого  $\lambda \geq L$  функция

$$S_\lambda(w) = q(w) + \lambda(d_M^{1+\alpha}(w) + \|w - \bar{W}\|^\alpha d_M(w))$$

достигает минимума на  $\bar{W} + \delta B$  в точке  $\bar{W}$  и если  $\lambda > L$  и  $M$  замкнуто, то любая точка, минимизирующая  $S_\lambda$  на множестве  $\bar{W} + \delta B$ , принадлежит  $M$ .

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть существуют точка

$w \in \bar{W} + \delta B$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что  $S_\lambda(w) < q(\bar{W}) - \lambda\varepsilon$ , где  $\lambda \geq L$ . Возьмем точку

$c \in M$  такую, что  $\|c - w\|^{1+\alpha} + \|w - \bar{W}\|^\alpha \|c - w\| \leq d_M^{1+\alpha}(w) + \|w - \bar{W}\|^\alpha d_M(w) + \varepsilon$  и  $\|c - w\| \leq \delta$ .

Так как  $\|w - \bar{W}\| \leq \delta$ ,  $q'(\bar{W}) = 0$ ,  $q(c) = q(\bar{W} + (w - \bar{W}) + (c - w))$  и  $q(w) = q(\bar{W} + w - \bar{W})$ , то из леммы 3 имеем, что

$$\begin{aligned} q(c) &\leq q(w) + L(\|c - w\|^{1+\alpha} + \|w - \bar{W}\|^\alpha \|c - w\|) \leq q(w) + \lambda(\|c - w\|^{1+\alpha} + \|w - \bar{W}\|^\alpha \|c - w\|) \leq \\ &\leq q(w) + \lambda(d_M^{1+\alpha}(w) + \|w - \bar{W}\|^\alpha d_M(w)) + \lambda\varepsilon < q(\bar{W}). \end{aligned}$$

Это противоречит условию, что  $q$  достигает минимума в точке  $\bar{W}$  на множестве  $M$ .

Если  $\lambda > L$  и  $w \in \bar{W} + \delta B$  также минимизирует функцию  $S_\lambda$  на множестве  $\bar{W} + \delta B$ , то из первой части теоремы 5 получим

$$q(w) + \lambda(d_M^{1+\alpha}(w) + \|w - \bar{W}\|^\alpha d_M(w)) = q(\bar{W}) \leq q(w) + \frac{\lambda + L}{2}(d_M^{1+\alpha}(w) + \|w - \bar{W}\|^\alpha d_M(w)).$$

Отсюда получим, что  $d_M^{1+\alpha}(w) + \|w - \bar{W}\|^\alpha d_M(w) = 0$ . Поэтому  $d_M(w) = 0$ . Так как  $M$  замкнуто, то  $w \in M$ . Теорема доказана.

Положим  $D = \{w \in M : q'(\bar{W})(w - \bar{W}) \leq 0\}$ .

**Следствие 3.** Если  $\bar{w} \in M$  является минимумом функции  $q$  на множестве  $M$ , функция  $q$  дифференцируема по Фреше в множестве  $\bar{w} + 2\delta B$  и найдется  $L > 0$  такое, что  $\|q'(u) - q'(v)\| \leq L \|u - v\|^\alpha$  при  $u, v \in \bar{w} + 2\delta B$ , где  $\delta > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $M \subset \bar{w} + \delta B$ , то для любого  $\lambda \geq L$  функция

$$g_\lambda(w) = q(w) - q'(\bar{w})(w - \bar{w}) + \lambda(d_D^{1+\alpha}(w) + \|w - \bar{w}\|^\alpha d_D(w))$$

достигает минимума на  $\bar{w} + \delta B$  в точке  $\bar{W}$  и если  $\lambda > L$  и  $D$  замкнуто, то любая точка, минимизирующая  $g_\lambda$  на множестве  $\bar{w} + \delta B$  принадлежит  $D$ .

**Доказательство.** Ясно, что  $\bar{W}$  является минимумом функции  $q(w) - q'(\bar{w})(w - \bar{w})$  на множестве  $D$  и функция  $q(w) - q'(\bar{w})(w - \bar{w})$  удовлетворяет условию теоремы 5 с постоянной  $L$  в  $\bar{w} + 2\delta B$ . Применяя теорему 5 получим, что для любого  $\lambda \geq L$  функция

$$g_\lambda(w) = q(w) - q'(\bar{w})(w - \bar{w}) + \lambda(d_D^{1+\alpha}(w) + \|w - \bar{w}\|^\alpha d_D(w))$$

достигает минимума на  $\bar{w} + \delta B$  в точке  $\bar{W}$ .

Из теоремы 5 также вытекает, что если  $\lambda > L$  и  $D$  замкнуто, то любая точка, минимизирующая  $g_\lambda$  на множестве  $\bar{w} + \delta B$ , принадлежит  $D$ .

Следствие доказано.

Положим

$$\begin{aligned} q^{\{1+\alpha\}-}(\bar{w}; w) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{q(\bar{w} + tw) - tq'(\bar{w})(w) - q(\bar{w})}{t^{1+\alpha}}, \\ q^{\{1+\alpha\}+}(\bar{w}; w) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{q(\bar{w} + tw) - tq'(\bar{w})(w) - q(\bar{w})}{t^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Отметим, что если функция  $q$  дважды дифференцируема по Фреше в точке  $\bar{W}$ , то  $q^{\{2\}-}(\bar{w}; w) = q^{\{2\}+}(\bar{w}; w) = \frac{1}{2}q''(\bar{w})(w, w)$  при  $w \in X$ .

Пусть  $G \subset X$ ,  $\mu > 0$  и  $\bar{w} \in G$ . Положим

$$d_G^{\{\mu\}-}(\bar{w}; w) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{d_G^\mu(\bar{w} + tw) - d_G^\mu(\bar{w})}{t^\mu}, \quad d_G^{\{\mu\}+}(\bar{w}; w) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{d_G^\mu(\bar{w} + tw) - d_G^\mu(\bar{w})}{t^\mu},$$

$$K_G(\bar{w}) = \{w \in X : d_G^{\{1\}+}(\bar{w}; w) = 0\} \text{ и } B_G(\bar{w}) = \{w \in X : d_G^{\{1\}-}(\bar{w}; w) = 0\}.$$

При этом  $K_G(\bar{w})$  часто называют касательным конусом множества  $G$  в точке  $\bar{w}$ , а  $B_G(\bar{w})$  - конусом Булигана (см. также п.2) в этой точке.

**Теорема 6.** Пусть  $\bar{w} \in M$  является минимумом функции  $q$  на множестве  $M$ , функция  $q$  дифференцируема по Фреше в множестве  $\bar{w} + 2\delta B$  и найдется  $L > 0$  такое, что  $\|q'(u) - q'(v)\| \leq L \|u - v\|^\alpha$  при  $u, v \in \bar{w} + 2\delta B$ , где  $\delta > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $M \subset \bar{w} + \delta B$  и  $\lambda \geq L$ . Тогда

$$q^{\{1+\alpha\}-}(\bar{w}; w) + \lambda d_D^{\{1+\alpha\}+}(\bar{w}; w) + \lambda \|w\|^\alpha d_D^{\{1\}+}(\bar{w}; w) \geq 0,$$

$$q^{\{1+\alpha\}+}(\bar{w}; w) + \lambda d_D^{\{1+\alpha\}-}(\bar{w}; w) + \lambda \|w\|^\alpha d_D^{\{1\}-}(\bar{w}; w) \geq 0$$

при  $w \in X$ .

**Доказательство.** Из следствия 3 следует, что для любого  $\lambda \geq L$  функция

$g_\lambda(w) = q(w) - q'(\bar{w})(w - \bar{w}) + \lambda(d_D^{1+\alpha}(w) + \|w - \bar{w}\|^\alpha d_D(w))$  достигает минимума на  $\bar{w} + \delta B$  в точке  $\bar{W}$ . Поэтому  $g_\lambda^{\{1+\alpha\}-}(\bar{w}; w) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g_\lambda(\bar{w} + tw) - g_\lambda(\bar{w})}{t^{1+\alpha}} \geq 0$  при  $w \in X$ . Отсюда имеем, что

$$\begin{aligned} 0 \leq g_\lambda^{\{1+\alpha\}-}(\bar{w}; w) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t^{1+\alpha}} (q(\bar{w} + tw) - q'(\bar{w})(tw) - q(\bar{w}) + \lambda(d_D^{1+\alpha}(\bar{w} + tw) + \|tw\|^\alpha d_D(\bar{w} + tw))) \leq \\ &\leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{q(\bar{w} + tw) - tq'(\bar{w})(w) - q(\bar{w})}{t^{1+\alpha}} + \lambda \lim_{t \downarrow 0} \frac{d_D^{1+\alpha}(\bar{w} + tw)}{t^{1+\alpha}} + \lambda \lim_{t \downarrow 0} \frac{\|w\|^\alpha d_D(\bar{w} + tw)}{t} = \\ &= q^{\{1+\alpha\}-}(\bar{w}; w) + \lambda d_D^{\{1+\alpha\}+}(\bar{w}; w) + \lambda \|w\|^\alpha d_D^{\{1\}+}(\bar{w}; w) \end{aligned}$$

при  $w \in X$ .

Аналогично проверяется справедливость второго соотношения. Теорема доказана.

При условии теоремы 6 имеем, что  $q^{\{1+\alpha\}-}(\bar{w}; w) \geq 0$  при  $w \in K_D(\bar{w})$  и  $q^{\{1+\alpha\}+}(\bar{w}; w) \geq 0$  при  $w \in B_D(\bar{w})$ . Так как  $T_D(\bar{w}) \subset B_D(\bar{w})$ , то  $q^{\{1+\alpha\}+}(\bar{w}; w) \geq 0$  при  $w \in T_D(\bar{w})$ .

Если  $q'(\bar{w}) = 0$ , то  $T_D(\bar{w}) = T_M(\bar{w})$ , а если  $T_{M_{-1}}(\bar{w}) \cap (\bigcap_{t=0}^T I_{M_t}(\bar{w})) \neq \emptyset$ , то по лемме 1 имеем, что  $T_M(\bar{w}) \supset \bigcap_{t=-1}^T T_{M_t}(\bar{w})$ . Поэтому  $q^{\{1+\alpha\}+}(\bar{w}; w) \geq 0$  при  $w \in \bigcap_{t=-1}^T T_{M_t}(\bar{w})$ .

Положив  $\text{gr}P_t = T_{\text{gra}_t}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ , определим  $P_t : X_t \rightarrow P(X_{t+1})$ ,  $t = 0, 1, \dots, T-1$ . Тогда множество  $\bigcap_{t=-1}^T T_{M_t}(\bar{w})$  совпадает с множеством решений задачи

$$z_{t+1} \in P_t(z_t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad z_0 \in T_\xi(\bar{x}_0), \quad z_T \in T_C(\bar{x}_T). \quad (18)$$

Поэтому если  $q'(\bar{w}) = 0$  и  $T_{M_{-1}}(\bar{w}) \cap (\bigcap_{t=0}^T I_{M_t}(\bar{w})) \neq \emptyset$ , то при условии теоремы 6 получим, что  $q^{\{1+\alpha\}+}(\bar{w}; w) \geq 0$  на множество решений задачи (18).

##### 5. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОРЯДКА $\beta$ , ГДЕ $1 < \beta \leq 2$

Рассмотрим минимизацию функции  $q(w)$  среди всех решений задачи (7), (8), где  $n(t) \in N$ ,  $a_t : R^{n(t)} \rightarrow P(R^{n(t+1)})$  при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ ,  $q : R^n \rightarrow R$ ,  $\xi \subset R^{n(0)}$ ,  $C \subset R^{n(T)}$ ,  $n = n(0) + n(1) + \dots + n(T)$ . Через  $M$  обозначим множество траекторий задачи (7), (8).

**Теорема 7.** Если функция  $q$  дифференцируема в множестве  $\bar{w} + 2\delta B$  и найдется  $L > 0$  такое, что  $\|q'(u) - q'(v)\| \leq L \|u - v\|^\alpha$  при  $u, v \in \bar{w} + 2\delta B$ , где  $\delta > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $M \subset \bar{w} + \delta B$ , существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\varphi(w) = \langle q'(\bar{w}), w \rangle \geq 0$  при  $w \in (M - \bar{w}) \cap \varepsilon B$  и  $q^{\{1+\alpha\}-}(\bar{w}; w) > 0$  при  $w \in \{v \in B_M(\bar{w}) : \varphi(v) \leq 0\}$ ,  $w \neq 0$ , то  $\bar{w} \in M$  является точкой строгого локального минимума функции  $q$  на множестве  $M$ .

**Доказательство.** Допустим противное. Тогда точка  $\bar{w}$  не является точкой строгого локального минимума функции  $q$  на множестве  $M$ . Поэтому для любого  $\delta_k > 0$  найдется  $w_k \neq 0$ , где  $\|w_k\| \leq \delta_k$ ,

такое, что  $\bar{w} + w_k \in M$  и  $q(\bar{w} + w_k) \leq q(\bar{w})$ . Положим  $t_k = \|w_k\|$ ,  $z_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}$ . Так как  $\|z_k\| = 1$ ,

то не умаляя общности можно считать, что  $z_k \rightarrow z$ , где  $\|z\| = 1$ . Так как  $\bar{w} + t_k z_k \in M$  при  $t_k \downarrow 0$ , где  $t_k = \|w_k\|$ , то имеем, что  $z \in B_M(\bar{w})$ .

По условию  $\|q'(u)\| \leq \|q'(\bar{w})\| + L \|u - \bar{w}\|^\alpha \leq K = \|q'(\bar{w})\| + L(2\delta)^\alpha$  при  $u \in \bar{w} + 2\delta B$ . Тогда из теоремы о среднем [12, с.38] следует, что  $|q(u) - q(v)| \leq K \|u - v\|$  при  $u, v \in \bar{w} + 2\delta B$ . Из леммы 3 имеем, что  $|q(\bar{w} + t_k z) - \varphi(t_k z) - q(\bar{w})| \leq Lt_k^{1+\alpha} \|z\|^{1+\alpha}$  при  $t_k \leq \delta$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(t_k z) &\leq q(\bar{w} + t_k z) - q(\bar{w}) + Lt_k^{1+\alpha} \|z\|^{1+\alpha} \leq q(\bar{w} + t_k z) - q(\bar{w} + t_k z_k) + Lt_k^{1+\alpha} \|z\|^{1+\alpha} \leq \\ &\leq Kt_k \|z_k - z\| + Lt_k^{1+\alpha} \|z\|^{1+\alpha} \end{aligned}$$

при  $k \in N$ . Если разделить на  $t_k$  и перейти к предел при  $k \rightarrow \infty$ , то имеем, что  $\varphi(z) \leq 0$ . Если  $\delta_k \leq \min\{0,5\delta; \varepsilon\}$  при  $k \in N$ , то  $\|t_k z_k\| \leq \varepsilon$  и  $\varphi(t_k z_k) \geq 0$  при  $k \in N$ . Тогда из леммы 3 получим

$$\begin{aligned} q(\bar{w} + t_k z) - \varphi(t_k z) - q(\bar{w}) &\leq q(\bar{w} + t_k z) - \varphi(t_k z) - q(\bar{w} + t_k z_k) + \varphi(t_k z_k) \leq \\ &\leq |q(\bar{w} + t_k z + (t_k z_k - t_k z)) - q(\bar{w} + t_k z) - \langle q'(\bar{w}), t_k z_k - t_k z \rangle| \leq Lt_k \|z_k - z\| (t_k^\alpha \|z\|^\alpha + t_k^\alpha \|z_k - z\|^\alpha) \end{aligned}$$

при  $k \in N$ . Поэтому

$$q^{\{1+\alpha\}-}(\bar{w}; z) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q(\bar{w} + t_k z) - \varphi(t_k z) - q(\bar{w})}{t_k^{1+\alpha}} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} L \|z_k - z\| (\|z\|^\alpha + \|z_k - z\|^\alpha) = 0,$$

т.е.  $q^{\{1+\alpha\}-}(\bar{w}; z) \leq 0$ . Так как  $z \in B_M(\bar{w})$  и  $\varphi(z) \leq 0$ , то имеем противоречие. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 7 следует следующее следствие.

**Следствие 4.** Если функция  $q$  дифференцируема в множестве  $\bar{w} + 2\delta B$  и найдется  $L > 0$  такое, то  $\|q'(u) - q'(v)\| \leq L \|u - v\|^\alpha$  при  $u, v \in \bar{w} + 2\delta B$ , где  $\delta > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $M \subset \bar{w} + \delta B$ ,  $M$  выпуклое множество,  $\varphi(w) = \langle q'(\bar{w}), w \rangle \geq 0$  и  $q^{\{1+\alpha\}-}(\bar{w}; w) > 0$  при  $w \in T_M(\bar{w})$ ,  $w \neq 0$ , то  $\bar{w} \in M$  является точкой строгого локального минимума функции  $q$  на множестве  $M$ .

**Замечание 2.** Если  $B_M(\bar{w}) = \bigcap_{t=-1}^T B_{M_t}(\bar{w})$  (см.[1, 2]), то из теоремы 7 и следствия 4 следует достаточное условие для задачи минимизации функции  $Q$  среди всех решений задачи (7),(8).

### Список литературы

1. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. -М.: Наука, 1988.- 280 с.
2. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. -М.: Мир, 1988. - 510 с.
3. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. -М.: Наука, 1980.- 319 с.
4. Садыгов И.М. Об одной макроэкономической модели // Мультидисциплинарный научный журнал «Архивариус». - 2018.- Выпуск 6(31).- С.91-101.
5. Садыгов М.А. Задачи на экстремум с ограничениями в метрическом пространстве // ДАН, 2013.- Т. 452, №5.-С.490-493.
6. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. - Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014.-359 с.
7. Красс И.А. Математические модели экономической динамики. -Изд-во «Советское радио», 1976.- 280 с.
8. Makarov V.L., Levin M.J., Rubinov A.M. Mathematical Economic Theory: Pure and Mixed Types of Economic Mechanisms. -Elsevier, Amsterdam, 1995. - 610 р.
9. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.- 429 с.
10. Гирсанов И.В. Математическая теория экстремальных задач.-Изд-во МГУ, 1970.-109 с.
11. Clarke F. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. – London: Springer-Verlag, 2013.-591 р.
12. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974.-479 с.

# TECHNICAL SCIENCES

## ЕНЕРГОЕФЕКТИВНИЙ ПІДХІД ДО ПІДГРІВУ І ОБЛІКУ ГАЗУ В СТАЦІОНАРНИХ ГРП СИСТЕМИ ГАЗОПОСТАЧАННЯ УКРАЇНИ

**Франчук Ю.Й.**

к.т.н., асистент,

*Київський національний університет будівництва і архітектури,*

*м. Київ, Україна,*

*ORCID: 0000-0002-7910-8705*

**Пефтьєва І.О.**

*м. Київ, Україна,*

*ORCID: 0000-0002-8858-9010*

## AN ENERGY-EFFICIENT APPROACH TO GAS HEATING AND ACCOUNTING IN STATIONARY HYDRAULIC FRACTURING SYSTEMS OF THE GAS SUPPLY SYSTEM OF UKRAINE

**Franchuk Y.,**

*PhD, assistant professor.*

*Kiev National University of Civil Engineering and Architecture,*

*Kyiv, Ukraine*

**Peftieva I.**

*Kyiv, Ukraine*

DOI: [10.5281/zenodo.8019725](https://doi.org/10.5281/zenodo.8019725)

### **Анотація**

Газорегуляторний пункт (ГРП) – комплекс обладнання для зниження тиску газу та підтримання його на заданому рівні. В приміщенні ГРП для продуктивної роботи регуляторів має підтримуватись оптимальна температура, в зимовий період не менше +5°C. При цьому потрібно враховувати факт що при дроселюванні природного газу температура його знижується. Наявність вологи в газах значно ускладнює експлуатацію газопроводу. Пари вуглеводнів, що входять в склад газу, при певних (від’ємних) температурах перетворюються в рідину, тобто утворюють конденсат. Відповідно і водяні пари, що знаходяться в газі перетворюються в рідину, а потім в лід. Сам по собі конденсат газу може закупорювати газопроводи, клапани регуляторів тиску, запірну арматуру, попадати в імпульсні трубки, що виведе регулятор з режиму штатної роботи. Рішення з підтримання Існуючі засоби підтримання потребної температури в приміщенні ГРП мають певні недоліки. Спалювання газу в приміщенні ГРП несе небезпеку, а також додаткові фінансові витрати. Це відчутно особливо в останні часи коли вартість газу на європейському ринку зростає, тож є доцільним проводити заходи задля зменшення витрати газу на шляху його транспортування. За певних змін в принциповій схемі ГРП можна замінити традиційне нагрівання всього приміщення ГРП на нагрівання лише газу, що транспортується. Для цього пропонується встановлення нагрівача, що працює за принципом Ранка-Хілша. Заміна традиційних котлів у ГРП на нагрівачі, встановлені безпосередньо на газопроводі, вирішують декілька питань: економія енергоносіїв, пожежна безпека, відсутність впливу на екологію.

### **Abstract**

A gas regulating point (GRP) is a complex of equipment for reducing gas pressure and maintaining it at a given level. In the fracturing room, for the productive operation of the regulators, the optimum temperature must be maintained, in the winter period at least +5°C. At the same time, it is necessary to take into account the fact that when throttling natural gas, its temperature decreases. The presence of moisture in the gases significantly complicates the operation of the gas pipeline. Vapors of hydrocarbons, which are part of the gas, at certain (negative) temperatures turn into liquid, i.e. form condensate. Accordingly, the water vapor in the gas turns into a liquid, and then into ice. By itself, gas condensate can clog gas pipelines, valves of pressure regulators, shut-off fittings, get into impulse tubes, which will lead the regulator out of normal operation. Maintenance solutions The existing means of maintaining the required temperature in the hydraulic fracturing room have certain disadvantages. Burning gas in the fracturing room is dangerous, as well as additional financial costs. This is particularly noticeable in recent times when the cost of gas on the European market is increasing, so it is advisable to take measures to reduce gas consumption on the way of its transportation. With certain changes in the hydraulic fracturing principle, the traditional heating of the entire hydraulic fracturing room can be replaced by heating only the transported gas. For this, it is suggested to install a heater that works according to the Rank-Hilsch principle. Replacing traditional boilers in hydraulic fracturing with heaters installed directly on the gas pipeline solves several issues: saving energy, fire safety, lack of environmental impact. The use of the Rank-Hilsch effect will ensure optimal operating conditions of the pressure regulator and stable gas supply conditions without complete heating of the room. The proposed conversion allows to receive gas consumption data at different time intervals, both in metric and energy units, and transmit them through the supplier-consumer network.

**Ключові слова:** газорегуляторний пункт, нагрівання газу, облік газу в метричних одиницях, облік газу в одиницях енергії, ефект Ранка-Хілша.

**Keywords:** gas control point, gas heating, gas accounting in metric units, gas accounting in energy units, Rank-Hilsch effect.

**Вступ.** Система газопостачання – технічний комплекс, до складу якого входять: газопроводи і споруди на них, газовикористовуючі установки, резервуарні, групові та індивідуальні установки зріджених вуглеводневих газів, котельні, газифіковані промислові, сільськогосподарські та інші підприємства, вузли обліку газу, газорегуляторні

пункти та установки. Газорегуляторний пункт (ГРП) – комплекс обладнання для зниження тиску газу та підтримання його на заданому рівні, розташований в окремо розташованих будівлях або прибудованих до інших будинків, та приміщеннях, вбудованих в інші [1]. Принципову схему ГРП наведено на рис.1.

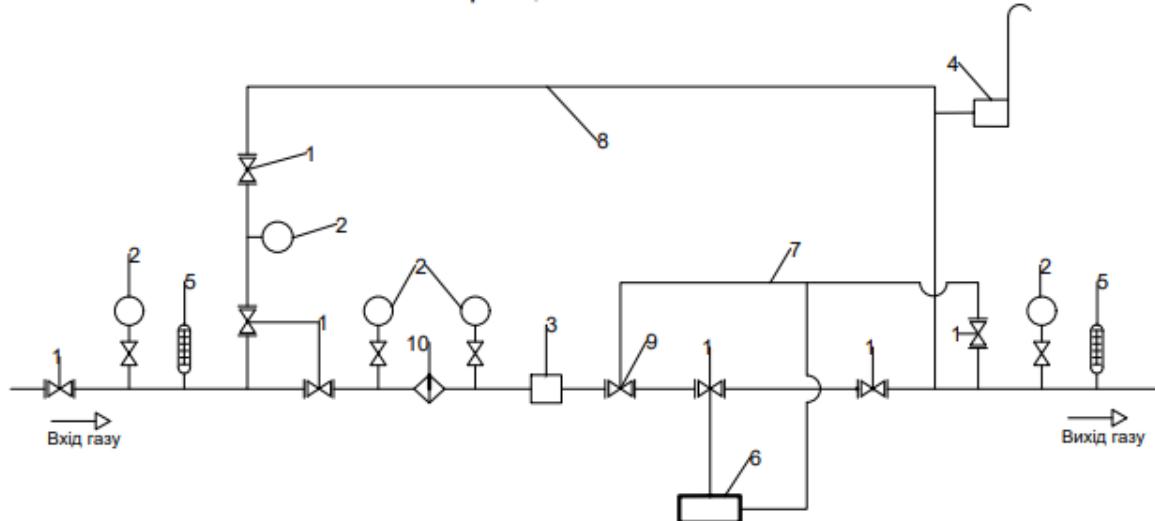


Рис. 1 Принципова схема ГРП

1 – засувка; 2 – манометр; 3 – вузол обліку газу; 4 – запобіжно-скідний клапан; 5 – термометр; 6 – регулятор тиску; 7 – імпульсний газопровід низького тиску; 8 – обвідний газопровід (бай пас); 9 – запобіжно-запірний клапан; 10 – фільтр.

**Актуальність дослідження.** В приміщенні ГРП для продуктивної роботи регуляторів має підтримуватись оптимальна температура, в зимовий період не менше +5°C [2]. При цьому потрібно враховувати факт що при дроселюванні природного газу температура його знижується, тобто спостерігається ефект Джоуля-Томпсона [3].

До того ж до закупорки газопроводів може привести утворення кристалогідратів при поєднанні вуглеводів з водою. Кристалогідрати являють собою білі кристалічні тіла, подібні на сніг чи лід. Так, метан з водою утворює гідрат  $\text{CH}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ , етан –  $\text{C}_2\text{H}_6 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ , пропан –  $\text{C}_3\text{H}_8 \cdot 18\text{H}_2\text{O}$  і т.д. Критична температура гідратоутворення: для метану – 21,5°C,

етану -14,5°C, пропану -5,5°C, н-бутану -2,5°C, ізо-бутану – 1°C (табл.1-4) [4,5]. Газ що транспортується має в певній долі ці складові. Чим важче вуглеводень, тим швидше в присутності води утвориться гідрат. Висока швидкість і турбулентність потоку, пульсація, швидкі повороти та інше також сприяє утворенню гідратів. Конденсат утворюється нижче певного рівня температур. Його утворення залежить від складу газу. Так, пари пропану при тиску до 5 кПа утворюють конденсат, коли температура понижується до -42 °C, а н-бутану – до -0,5 °C.

Виходячи з сказаного можемо бачити великий вплив температури газу що транспортується на стабільність та безперервність цього процесу.

Таблиця 1

Компонентний склад газу, відібраний в м. Київ станом на листопад 2020 року.

Компоненти	Вміст, %
$\text{N}_2$	1,2725
$\text{CH}_4$	91,165
$\text{CO}_2$	1,8675
$\text{C}_2\text{H}_4$	3,7975
$n\text{C}_4\text{H}_{10}$	0,9175
$n\text{C}_4\text{H}_{10}$	0,0875
$\text{H}_2\text{O}$	0,7675
<b>Разом</b>	<b>100,0</b>

Таблиця 2

**Вимірювання температури точки роси (ТТР)**

Характеристика точки вимірювання	Температура точки роси, К (°C)		Тиск газу, МПа
	вода	углеводні	
Газ з балона	263,85 (-9,3)	273,95 (+0,8)	2,5
Мережевий	250,05 (-23,1)	293,65 (-20,5)	0,3

Таблиця 3

**Розрахункова температура точки роси по воді й углеводням відповідно до відібраних проб природного газу**

Параметри перевірки	Значення за тиском, МПа	
	0,3	2,5
Точка роси по воді, К (°C)	293,07 (19,92)	328,53 (55,38)
Точка роси за углеводнями, К (°C)	187,34 (-85,81)	217,32 (-58,83)

Таблиця 4

**Розрахункова температура точки роси по воді (скорегований склад природного газу)**

Параметри перевірки	Значення за тиском, МПа	
	0,3	2,5
Точка роси по воді, К (°C)	243,25 (-29,9)	275,65 (2,5)
Точка роси за углеводнями, К (°C)	243,65 (-29,5)	276,20 (3,05)

**Формульовання цілей статті.** У запроектованих і побудованих приміщеннях ГРП за часів невеликої вартості енергоносіїв, оптимальна температура підтримувалась за допомогою спалювання певного об'єму природного газу, що транспортується, в побутовому котлі, розташованому в окремому приміщенні ГРП. Пізніше для обігріву стали передбачати газові конвектори, які, як відомо, не потребують води в систему опалення.

Ці рішення з підтримання потрібної температури в приміщенні ГРП мають певні недоліки. Використання газу для опалення несе певні фінансові витрати, відкритий вогонь в приміщенні ГРП несе небезпеку, а під час спалювання газу виділяються продукти згоряння, що має негативний вплив на оточуюче середовище. Фінансова складова стає важливішою особливо при різкому зростанні вартості газу на європейському ринку, тож є доцільним проводити заходи задля зменшення витрати газу на шляху його транспортування.

**Основна частина.** За певних змін в принциповій схемі ГРП можна замінити традиційне нагрівання всього приміщення ГРП на нагрівання лише газу, що транспортується.

Для цього пропонується встановлення нагрівача, що працює за принципом Ранка-Хілла.

Принцип роботи циліндричної труби у наступному. Газ під високим тиском подається у вихрову камеру тангенційно через закручувальний пристрій (рис.2). Розширюючись всередині труби, газ створює вихор, що швидко обертається. Діаметр діафрагми менший за діаметр труби, через це газ починає рухатись аксіально в сторону конічного дроселя по периферійній частині труби. Зі зменшенням закручування потоку по довжині труби виникає зворотний градієнт тиску у при осьовій області, що спонукає газ рухатись від дроселя в сторону діафрагми.

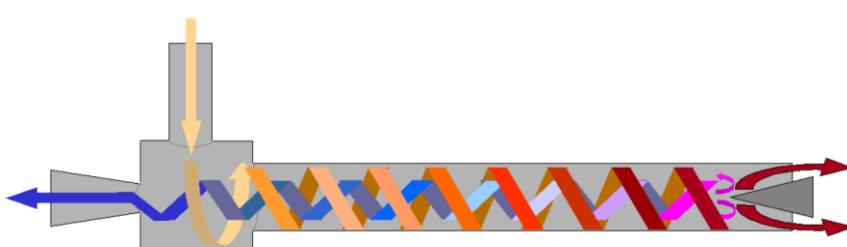


Рис. 2 Схема потоків в трубі Ранка.

Замінивши побутовий котел та опалювальний прилади, що зазвичай встановлюються для нагрівання приміщення ГРП (рис.3а) і, як наслідок, газу, що транспортується, на запропонований нагрівач, що встановлюється в залі редукування на газопроводі перед регулятором тиску (рис.3б), можна зекономити певну кількість енергоносія. Для підвищення достовірності обліку газу в одиницях енергії у приміщенні, що звільняється від опалювального газового обладнання можна пропонуватися встановити систему організації процесу диспетчеризації обліку. Така схема організації обліку природного газу дозволить отримати об'єктивну інформацію щодо енергетичної цінності газу в реальному часі і за певний період [6].

Розрахуємо економічну вигоду від зміни принципової схеми ГРП.

Вважаючи, що опалювальний період в Україні становить в середньому 180 днів, будемо розраховувати витрату газу на цей термін.

Згідно норм споживання газу [7], на 1 м<sup>2</sup> площини приміщення використовується 11 м<sup>3</sup> на опалювальний період. Тоді:

Площа приміщення:

$$F = 6,0 \cdot 6,8 = 40,8 \text{ м}^2$$

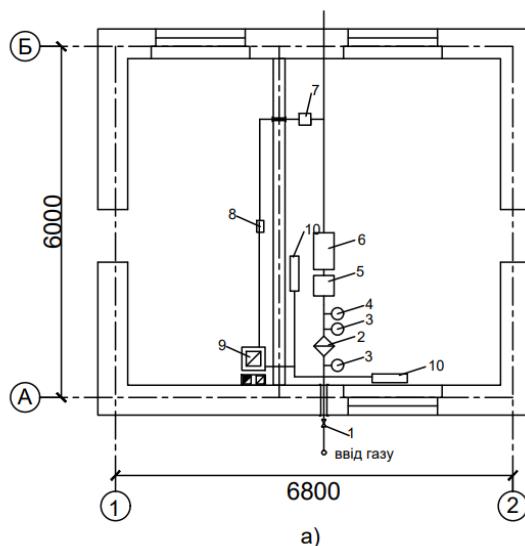
Витрата газу на опалення за опалювальний період:

$$Q = F \cdot q = 40,8 \cdot 11 = 448,8 \text{ м}^3/\text{місяць}$$

Приймаємо  $Q = 450 \text{ м}^3/\text{місяць}$ .

Тоді, за опалювальний період, що триває в середньому 180 днів, або 6 місяців:

$$Q_{\text{заг}} = 450 \cdot 6 = 2700 \text{ м}^3$$



a)

Ціна на газ на газову хабі TTF (Нідерланди) на момент написання статті становить 25,240 EUR/MВт · год. Середня ціна за опалювальний період 2022-2023 pp. становила 124,91 EUR/MВт · год.

Для переліку метричних одиниць в одиниці енергії приймаємо співвідношення: 1МВт · год ≈ 95,31 м<sup>3</sup>

Тоді витрата газу одним ГРП в одиницях енергії буде становити  $Q = 28,3 \text{ МВт} \cdot \text{год}$ .

Вартість використаного газу:

$$B = 28,3 \cdot 124,91 = 3535 \text{ EUR/опал. період}$$

У системі газопостачання України 1437 шт. ГРП. Загальна вартість енергоносіїв, що використовується для їх опалення становить:

$$B_{\text{заг}} = 3535 \cdot 1437 = 5079795 \text{ EUR/опал. період}$$

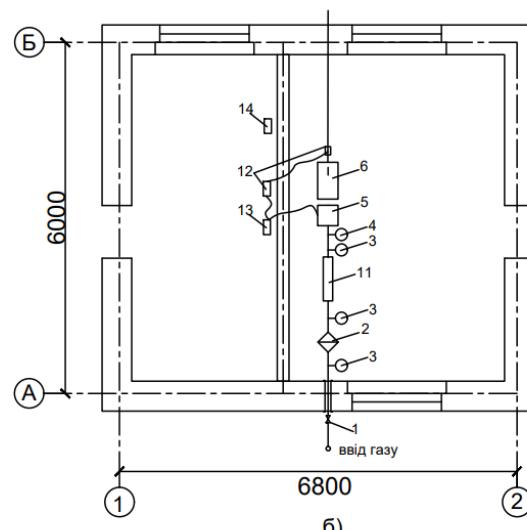
**Висновки.** 1. Відмова від спалювання газу в приміщенні ГРП підвищить безпеку газопостачання.

2. Відмова від використання природного газу як палива для опалення приміщення принесе економічний ефект.

3. Зменшується виділення продуктів спалювання газу в атмосферу.

4. Використання ефекту Ранка-Хілша забезпечить оптимальні умови роботи регулятора тиску і стабільні умови подачі газу без повного обігріву приміщення.

5. Запропоноване переобладнання дозволить отримувати дані щодо витрати газу за різні проміжки часу, як в метричних так і в одиницях енергії, та передавати їх мережою постачальник-споживач.



б)

Рис.3 Типовий проект ГРП а) до змін; б) із запропонованими змінами.

1 - засувка; 2 - фільтр; 3 - датчик тиску; 4 - датчик температури; 5 - вузол обліку газу;

6 - регулятор тиску; 7 - РДГС-10; 8 - лічильник Г-4; 9 - котел; 10 - опалювальний прилад;

11 - нагрівач газу; 12 - хроматограф; 13 - вторинний перетворювач; 14 - канал зв'язку GSM/GPRS/VPN.

**Список літератури**

1. Правила обліку природного газу. – Офіційний вісник України від 15.02.2006 – 2006 р., №5, с. 193. Режим доступу <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0067-06#Text>. – Заголовок з екрану. – Дата звернення 25.05.2023.
2. Енергетична стратегія України на період до 2035р. «Безпека, енергоефективність, конкурентоспроможність». Схвал. розпорядженням КМУ від 18.08.2017 р. №605-р. – URL: [http://mpe.kmu.gov.ua/minugol/control/publish/article?art\\_id=245234085](http://mpe.kmu.gov.ua/minugol/control/publish/article?art_id=245234085)
3. Алабовский А. Н., Недужий И. А. Техническая термодинамика и теплопередача: Учеб. Посо-бие.- 3-е изд., перераб. и доп. – К.:Вища школа., 1990.-255 с.
4. Франчук, Ю. Й. (2022). Зміна складу та якості газу при його русі в системі газопостачання. Вентиляція, освітлення та теплогазопостачання, 40, 50–56. <https://doi.org/10.32347/2409-2606.2022.40.50-56>
5. Інформація щодо якості природного газу [Електронний ресурс] - Режим доступу: <https://www.lgtrading.com.ua/g/quality-of-gas> - Заголовок з екрану. – Дата звернення 25.05.2022.
6. Предун К. М., Коновалюк, В. А., Франчук, Ю. Й. (2021). Удосконалення системи обліку природного газу в одиницях енергії. Вентиляція, освітлення та теплогазопостачання, 37, 62–67. <https://doi.org/10.32347/2409-2606.2021.37.62-67>
7. Норми споживання газу в Україні [Електронний ресурс] - Режим доступу: <https://gaszbut.com.ua/information/normi-spozivanna> - Заголовок з екрану. – Дата звернення 25.05.2022.

## COMPARATIVE ANALYSIS OF DIFFERENT USER GROUPS USING CUSTOMER DEVELOPMENT METHODS

**Turdaleyev A.**

*Master student*

*Kazakh-British Technical University,*

*Almaty, Kazakhstan*

DOI: [10.5281/zenodo.8019733](https://doi.org/10.5281/zenodo.8019733)

### **Abstract**

In today's digital age, a university website plays a vital role in attracting prospective students, engaging current students, and fostering collaboration within the academic community. However, designing and developing an effective university website can be a complex task, requiring a deep understanding of the diverse needs and preferences of its users. This work explores the application of customer development methods in the development of university websites, aiming to optimize user satisfaction, improve user experience, and ultimately enhance the overall effectiveness of these digital platforms. By leveraging customer development techniques, universities can gain valuable insights into user requirements, prioritize features, and build websites that effectively serve their target audience.

**Keywords:** customer development, university websites, user experience, user requirements, customer validation, agile development.

In today's digital era, university websites have become indispensable tools for institutions to engage with their target audience, including prospective students, current students, faculty members, and alumni. These websites serve as a central hub for accessing information about academic programs, campus facilities, admissions, events, and various other resources. A well-designed and user-friendly university website can significantly impact the institution's reputation, student enrollment, and overall user satisfaction. Therefore, it is essential for universities to invest in the development of effective websites that cater to the needs and preferences of their diverse user base.

Developing a university website that meets the expectations of its users can be a challenging task. The preferences and requirements of prospective students, current students, faculty, and staff can vary significantly, making it crucial to understand and address their unique needs. Furthermore, technological advancements and changing user behaviors necessitate continuous website improvements and updates. Without a systematic approach to user-centric design and development, universities risk developing websites that fail to deliver a satisfying user experience and do not align with their target audience's expectations.

The primary objective of this work is to explore the application of customer development methods in the development of university websites. By leveraging customer development techniques, universities can gain valuable insights into user requirements, preferences, and expectations. This research aims to provide practical guidance and recommendations on how universities can use customer development methods to optimize their website development process, enhance user experience, and ultimately achieve their communication and engagement goals.

This research will adopt a mixed-methods approach, combining qualitative and quantitative techniques. Primary data will be collected through interviews, surveys, and usability testing sessions with university website users, including prospective students, current students, faculty members, and staff. Secondary

data will be gathered through an extensive review of existing literature, case studies, and best practices in customer development and website development for higher education institutions. The findings will be analyzed, and practical recommendations will be formulated to guide universities in effectively implementing customer development methods in their website development process.

By adopting a user-centric approach and integrating customer development methods, universities can create websites that address the needs and expectations of their diverse user base. The following sections will delve into the concept of customer development, the importance of user-centric design, and the application of customer development in university website development.

Customer development is an iterative and customer-focused approach to product or service development that emphasizes gaining deep insights into the target audience's needs, preferences, and pain points. It is a methodology coined by Steve Blank and popularized in his book "The Four Steps to the Epiphany." Customer development aims to minimize risk and increase the likelihood of creating successful products or services by actively involving customers throughout the development process.

At its core, customer development recognizes that assumptions and hypotheses about customer needs and market demand should be tested and validated through direct customer interaction. It encourages an ongoing conversation with customers to gain valuable feedback, refine product ideas, and ensure that the final product or service meets their expectations. The application of customer development methods in website development offers several benefits:

- Enhanced User Experience: By involving users throughout the development process, customer development ensures that the website is designed with their needs in mind. It enables the creation of intuitive navigation, relevant content, and personalized experiences, leading to improved user satisfaction and engagement.

- Reduced Development Risks: Customer development minimizes the risk of developing a website that does not meet user expectations or fails to deliver the desired outcomes. By continuously validating assumptions and gathering feedback, potential issues can be identified and addressed early in the development cycle.

- Improved Product-Market Fit: Customer development helps ensure that the website aligns with the target audience's preferences, leading to better product-market fit. By understanding user needs and pain points, universities can tailor their website offerings to provide relevant and valuable information and services.

- Higher Adoption and Engagement: A customer-centric approach to website development increases the likelihood of user adoption and long-term engagement. By involving users from the early stages, their sense of ownership and satisfaction with the website can be fostered, leading to increased usage and positive word-of-mouth referrals.

In the development of university websites, adopting a user-centric design approach is essential to ensure that the websites effectively meet the needs and expectations of their diverse user base. User-centric design focuses on understanding users, their goals, and their interactions with the website to create intuitive and engaging experiences. This section explores the importance of user-centric design for university websites and discusses key methodologies and techniques employed in this approach.

User-centric design places the user at the center of the website development process, considering their goals, behaviors, and preferences. By prioritizing user needs, university websites can enhance user satisfaction, engagement, and ultimately achieve their communication and educational objectives. The following points highlight the importance of user-centric design for university websites:

- User Experience (UX): User-centric design aims to optimize the user experience by ensuring that the website is easy to navigate, visually appealing, and provides relevant and valuable information. By understanding user expectations and incorporating intuitive design principles, universities can create websites that foster positive interactions and leave a lasting impression on users.

- Audience Engagement: University websites serve a diverse range of users, including prospective students, current students, faculty, staff, and alumni. Each group has unique needs and goals. User-centric design enables universities to tailor website content and features to meet the specific requirements of these user groups, fostering engagement and facilitating effective communication.

- Conversion and Enrollment: For universities, the website plays a crucial role in attracting and converting prospective students into enrolled students. User-centric design helps universities optimize the conversion funnel by aligning website content, calls-to-action, and user journeys with the needs and motivations of prospective students. By streamlining the enrollment

process and addressing potential pain points, universities can increase conversion rates and achieve enrollment goals.

- Brand Perception: A well-designed and user-friendly website reflects positively on the university's brand image. A user-centric approach ensures that the website aligns with the university's values, identity, and messaging. Consistent branding, intuitive navigation, and compelling visuals contribute to a positive perception of the university and its offerings.

User journey mapping involves plotting the user's interactions and experiences with the website across different touchpoints and stages. It helps universities visualize the user's flow, interactions, and emotions throughout their journey. By mapping user journeys, universities can identify pain points, areas of friction, and opportunities for enhancing the website experience at each stage of the user's interaction. User journey mapping can be used to optimize specific user flows, such as the admission process, course selection, or accessing resources. By understanding the user's perspective, universities can streamline processes, reduce friction, and create a seamless user experience.

Customer development methods provide valuable insights into user needs, preferences, and expectations, making them highly applicable to the development of university websites. This section explores how customer development can be effectively applied in the context of university website development, enabling universities to create user-centric websites that meet the diverse requirements of their stakeholders.

To effectively apply customer development in university website development, it is crucial to identify and understand the different user segments and stakeholders involved. Universities serve various user groups, including prospective students, current students, faculty members, staff, and alumni. Each group has unique needs and expectations, and their engagement with the website may differ significantly.

Conducting a stakeholder analysis helps universities identify key user segments, determine their importance, and prioritize their needs. By categorizing users into segments, universities can tailor their customer development efforts to gather insights specific to each group. This segmentation allows for personalized website experiences and targeted communication strategies.

Customer development relies on gathering direct feedback from users to inform decision-making. Universities can employ various techniques to gather user feedback, such as conducting surveys. Surveys provide quantitative data on user preferences, satisfaction levels, and areas for improvement. Universities can distribute surveys to different user groups and analyze the results to gain insights into the website's effectiveness. In designing surveys, it is crucial to ask relevant and focused questions that capture user needs and expectations. Surveys can cover topics such as website navigation, content relevance, ease of use, and overall user satisfaction. By analyzing survey responses, universities can identify areas of improvement and prioritize enhancements based on user feedback.

In addition to surveys, user interviews and focus groups provide valuable qualitative insights into user

perspectives. These methods involve direct interaction with users to understand their experiences, motivations, and pain points related to the university website. User interviews allow for in-depth conversations with individual users, enabling universities to gain a deep understanding of their needs and behaviors. Focus groups, on the other hand, bring together a small group of users to facilitate discussions and gather diverse perspectives. Both methods help universities uncover valuable insights, validate assumptions, and identify opportunities for website enhancement.

Usability testing is a crucial component of customer development in university website development. It involves observing users as they interact with the website and identifying areas of difficulty or confusion. Usability testing can be conducted through various methods, such as in-person sessions, remote testing, or the use of eye-tracking technology. By observing user behavior and collecting feedback during usability testing, universities can identify usability issues, improve website navigation, and enhance the overall user experience. Usability testing helps validate design decisions, optimize user flows, and ensure that the website meets user expectations.

Customer development in university website development emphasizes an iterative approach, wherein feedback and insights from users are continuously incorporated into the development process. By embracing an iterative mindset, universities can create websites that evolve and improve based on user needs and changing expectations.

The customer development process should allow for continuous feedback loops and a culture of improvement. Universities can establish mechanisms for collecting and analyzing user feedback on an ongoing basis, such as feedback forms, user support channels, or user forums. This iterative development approach ensures that the website remains responsive to user needs and adapts to evolving trends and technologies.

Customer development methods offer significant value in the development of university websites, enabling universities to create user-centric platforms that meet the diverse needs and expectations of their stakeholders. By applying customer development principles and techniques, universities can gather insights, validate assumptions, and continuously improve their websites to enhance user satisfaction, engagement, and overall effectiveness.

The application of user-centric design principles, such as user personas, empathy mapping, and user journey mapping, helps universities gain a deep understanding of their target users and tailor the website experience to their specific requirements. By considering the unique characteristics of different user groups, including prospective students, current students, faculty, staff, and alumni, universities can optimize the website to cater to their needs and goals.

The use of customer development methods, such as surveys, user interviews, focus groups, and usability testing, allows universities to gather direct feedback from users, validate assumptions, and identify areas for improvement. These methods provide valuable insights into user preferences, pain points, and expectations, enabling universities to make informed decisions and prioritize website enhancements.

Adopting an iterative development approach and fostering a culture of continuous improvement allows universities to respond to changing user needs and technological advancements. By incorporating user feedback into the development process, universities can refine the website, optimize user flows, and ensure an intuitive and engaging user experience. Furthermore, collaboration and co-creation with users foster a sense of ownership and engagement. By involving users in the co-design process, universities can tap into their expertise, generate innovative ideas, and ensure that the website aligns with their needs and expectations.

In conclusion, customer development methods provide a framework for universities to develop user-centric websites that effectively serve their diverse stakeholders. By applying user-centric design principles, gathering user feedback, and fostering an iterative and collaborative approach, universities can create websites that enhance user satisfaction, engagement, and ultimately contribute to their communication and educational objectives. The successful application of customer development in university website development lies in the ongoing commitment to understanding user needs, validating assumptions, and continuously improving the website experience.

## References

1. Alexanyan W. The science of user experience. The use of cognitive biases in the development of quality products. 2020. [Electric resource] – Access mode: <https://habr.com/en/articles/512842/>
2. Beskov D. Introduction to Customer Development. 2018. [Electric resource] – Access mode: <https://vc.ru/marketing/53090-vvedenie-v-customer-development>
3. Bragg R. Designing college and university website navigation using UX design. 2016. [Electric resource] – Access mode: <https://medium.com/valtech-sitecore-experts/designing-college-and-university-website-navigation-using-ux-design-a69ab35c8993>
4. Hosseini N., Abdellatif T., Nakhil R. Improving the websites user experience (UX) through the human-centered design approach. 2021. [Electric resources] – Access mode: [https://jdsaa.journals.ekb.eg/article\\_173003\\_d9f63f5e88c6a75503dbba6d89663cdc.pdf](https://jdsaa.journals.ekb.eg/article_173003_d9f63f5e88c6a75503dbba6d89663cdc.pdf)
5. Kovalieva O. Customer Development: 50 Interview Questions. 2018. [Electric resource] – Access mode: <https://vc.ru/growth/33082-customer-development-50-voprosov-dlya-intervyu>
6. Le K. User-centered Design Method. 2017. [Electric resource] – Access mode: <https://medium.com/redcatstudio/user-centered-design-method-28e3aafc8c8a>
7. Stain D. A. Development of websites of a teacher and a university department and their use to create an effective system for managing the educational process. 2016. [Electric resource] – Access mode: <https://cyberleninka.ru/article/n/razrabotka-web-saytov-prepodavatelya-i-kafedry-universiteta-i-ih-ispolzovanie-dlya-sozdaniya-effektivnoy-sistemuy-upravleniya/viewer>

## JUSTIFICATION OF THE INITIAL PRINCIPLES OF PLANNING THE NEED FOR SPARE PARTS FOR ENGINEERING EQUIPMENT RECOVERY

**Baranov A.,**

*Candidate of Technical Sciences (Ph.D), Associate Professor,  
associate professor of the Support Forces Tactics Department,  
Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy  
Ukraine, Lviv*

**Baranov Yu.,**

*Candidate of Technical Sciences (Ph.D), Associate Professor,  
professor of the Department of Engineering Equipment,  
Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy  
Ukraine, Lviv*

**Brychynskyi O.,**

*Senior instructor of the Support Forces Tactics Department,  
Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy, Ukraine, Lviv*

**Mishchenko V.,**

*Senior instructor of the Support Forces Tactics Department,  
Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy  
Ukraine, Lviv*

**Burashnikov O.**

*the Head of the Scientific-research Department (Engineer troops) of the Army Scientific Center, Hetman  
Petro Sahaidachnyi National Army Academy  
Ukraine, Lviv*

DOI: [10.5281/zenodo.8019737](https://doi.org/10.5281/zenodo.8019737)

### **Abstract**

Analysis of employment of engineering equipment in the area of the Joint Forces operation, and now – during the Ukrainian-Russian war, indicates an insufficient level of rational distribution and use of spare parts by the troops (forces) repair and recovery bodies. Besides, lack of necessary spare parts leads to long periods of engineering equipment recovery, and as a consequence, the unpreparedness of the engineer unit to perform the assigned tasks.

The article is prepared on a topical issue related to justification of the initial principles of planning the need for spare parts to carry out recovery of engineering equipment, which in turn will allow: to make correct management decisions regarding maintaining a certain level of technical condition of engineering equipment; timely supply of repair units with spare parts; will improve time indicators for recovery of engineering equipment.

**Keywords:** engineering equipment; technical condition; spare parts.

### **1. INTRODUCTION.**

The main condition for the successful performance of tasks of engineering support for the actions of troops (forces) by the engineer units of the Armed Forces (AF) of Ukraine in the area of the Joint Forces operation (JFO), as well as during the large-scale invasion of the Russian Federation on the territory of Ukraine, is to maintain the combat capability of the engineer units of the Armed Forces of Ukraine according to the level of completeness with engineering equipment (EE) serviceable samples [1; 2].

**Formulation of the problem.** The experience of the use of engineer units of the Armed Forces of Ukraine in the area of JFO shows that the problem of the availability of spare parts (SP) in repair units has become very acute. The main part of EE has exceeded the limit of its service life, and has also exhausted its resource, which led to the occurrence of failures in the main amount of the equipment [3].

It can also be noted that during JFO, the main source of replenishment of EE losses is its timely recovery. But very often, the lack of the necessary SP leads to long periods of its recovery and, as a result, the engineer unit is unprepared to perform the task as intended. The problem of availability of SP in repair units

is one of the most important, since timely provision or availability of the necessary amount of SP enables repair units to quickly carry out work on recovering the technical condition (TC) of EE, and, accordingly, ensure the effective use as intended.

#### **Analysis of recent research and publications.**

When searching for scientific publications in this subject area, one cannot ignore the scientific works of leading scientists (V. Sivak [4], O. Vorobiov [5], B. Demyanchuk [6], O. Volokh [7], P. Openenko [8] and others). The researchers consider increasing of the TC efficiency of military equipment.

However, taking into account the results of the above-mentioned scientific studies and the experience of conducting JFO [9], there is an urgent need to increase the level of efficiency of EE TC recovery by adjusting the need for SP.

Thus, justification of the initial principles of planning the need for spare parts in order to carry out recovery of engineering equipment will allow to make correct management decisions regarding maintaining a certain level of EE TC and timely supply of repair units with SP, as well as to improve time indicators for recovery of EE.

**The purpose of the article.** Justification of the initial principles of planning the need for SP in order to carry out recovery of EE TC.

## 2. RESEARCH RESULTS.

It is obvious that today to develop a methodology of planning the need for SP to recover EE TC is of interest, that will allow to solve the following tasks:

to determine the need for repair units in SP (formation of the necessary nomenclature and the number of SP required to recover EE TC);

determine the optimal size and periodicity of the order of SP;

carry out selection of the suppliers of SP;

to optimize the reserves of SP for recovery of EE TC;

to form a rational budget for the procurement of SP in the conditions of limited funding and the level of material and technical support.

The conditions in which EE is currently being used have created new problems in the field of providing SP. The lack of reliable operational information regarding EE failures during operation has led to the practical impossibility of applying methods based on the theory of recovery and the theory of operational reliability.

In mathematical statistics, there are two main criteria by which the applicability of a particular mathematical model is evaluated: accuracy and adequacy of the model [10]. Evaluation of models with the help of these criteria must be carried out after calculations of the need for repair units in SP.

When planning the need for SP for recovery of EE TC, it is necessary to formulate initial principles, namely:

provision of the forecast characteristics of the need for SP;

compliance with the requirements for initial data;

compliance with the requirements for models of forecasting the need for SP;

compliance with the requirements for standard packages of applied computer programs.

The forecast obtained using the selected mathematical model should be characterized by the following factors:

value (the value of the forecast is determined by the possibility of using its results for planning the activities of repair units);

reliability (the reliability of the forecast is determined by the reliability of the initial data and the correctly selected model of the phenomenon under study);

accuracy (accuracy is a criterion of forecast quality [10]);

timeliness (for prospective planning, prognostic assessments must be received in a timely manner);

compliance with the specified time interval (forecasts must correspond to the specified time interval, in the conditions of repair units work, it is necessary to receive short-term (monthly) forecasts, that is explained by the specific features of the use of EE samples).

The main initial data for planning the need for SP are the statistics of SP costs for the previous periods of using EE samples (time series of values), as well as

quantitative information about changes in the main factors affecting the need for SP. During the analysis of the initial data, it is determined which initial data are the most relevant while planning the need for SP. When collecting information, the selection of reliable data is carried out, confirmed by the reporting documentation of engineer units. Obtaining forecasts at a given time interval requires a constant sequence of initial data.

The process of ensuring the required level of EE TC is carried out with the aim of:

maintenance of EE TC at the proper level while performing the assigned tasks;

rapid recovery of EE TC (close interrelated connection between the need for SP and material and technical support).

In practice, the technically and economically justified supply of repair units with SP is achieved by the necessary level of resource provision, the key stages of which are cost planning and planning of the need for SP, the costs of their acquisition and storage. Currently, it is impossible to make an accurate forecast of the consumption of SP used for EE repair without conducting a prior detailed analysis of the current state of the EE sample, as well as taking into account the main significant factors that affect the process of using SP during the entire life of EE.

EE consists of recovery systems, the serviceability of which is maintained during its service life by performing EE recovery, with the aim of preventing and eliminating failures, repairing or replacing failed parts and assemblies. Accordingly, during the operation of EE samples, parts and assemblies are repeatedly replaced. Failure of parts and assemblies is a random event, and the probabilistic characteristics of parts resource dispersion are described by various distribution laws, which are determined by methods of mathematical statistics. The failure of parts and assemblies that occur during EE operation is eliminated by replacing faulty parts with new SP. With all types of EE or its component units repair, replacement of SP is carried out depending on the various intensity of failures of parts and assemblies. At the same time, the costs of purchasing SP depend not only on the frequency of SP replacements, but also on their market cost.

Also, the following working hypotheses and theoretical prerequisites must be adopted when planning the need for SP for EE TC recovery:

1) the planning of the need for SP during the EE service life in real operating conditions should: be based on reliability indicators, which are determined by the results of actual replacements of EE parts and assemblies in real operating conditions; be considered in stages, that is, according to the cycles of operation and types of EE repair;

2) the moment of the part, assembly or EE component unit limit state onset, is a random event (that is, there is a dispersion of resources compared to their average values);

3) EE parts, assemblies or EE component units are fully functional until they fail, after that they become completely inoperable. The tasks of replacing parts due to the gradual deterioration of the elements perfor-

mance or due to the gradual increase in the cost of storage are excluded;

4) queuing problems, which arise due to the fact that several elements have failed at the same time, and the means of repair are limited are not taken into account;

5) to simplify the calculations, it is accepted that when a recovered part is put into operation, the parameter of its fault-free operation duration corresponds to the new SP.

Any technical system, including EE, is characterized by a certain structure. That is, it is a set of elements that ensure the normal performance of the working functions of the entire system. In the process of operation, parts, assemblies and component units of EE samples lose their efficiency, that leads to failure or reaching the limit state of the system as a whole [2, 11]. To restore the EE IT, it is necessary to replace the defective part with a spare one, or repair it. From the point of view of SP use, we will consider only the replacement of parts and SP. Thus, in order to maintain the required level of EE IT during operation in the situation of parts, assemblies and component units failure for various reasons, their permanent replacement with SP takes place. It is obvious that in order to determine the characteristics of the change in the number of replacements of parts during the working life of EE, it is necessary to analyze the sequence of replacements of SP by time intervals or by intervals of working time.

A part that has been used since the beginning of EE operation during a random period of time, that is conventionally equal to the average resource of a new part, fails and is replaced by a new (spare) part.

A SP, which has worked for a random period of time, that is conventionally equal to the SP average resource, also fails and is replaced by another SP, etc.

Thus, in the process of EE operation, in order to constantly maintain the TC at a given level, the parts that have failed must be constantly replaced. If such a sequence of replacements is considered for the entire service life of EE until it reaches its limit state, then the latter can be represented in the form of a flow of SP replacements, caused by a flow of failures of EE parts, assemblies and component units [12]. If we look at a fairly long period of time, then with a high probability it can be stated that there will be a need for almost any type of SP. Therefore, to date, the question concerning SP which will be necessary during this period of time, and whether it is advisable to purchase them for preliminary storage, remains unresolved.

For effective inventory management, it is important to choose a reasonable method of forecasting. For this purpose, categories of short-term, medium-term and long-term forecasts are often used. Thus, when forecasting consumer demand for SP, in many cases a forecast of up to 6 months is considered short-term, from 6 months to 2 years - medium-term, and more than 2 years, respectively, long-term.

### **3. CONCLUSIONS AND PROSPECTS OF FURTHER RESEARCH.**

In this way, the principles of planning the needs for SP to recover EE TC have been considered. When

planning the need for SP to recover EE TC, it is necessary to take into account:

which elements of the SP nomenclature are subject to forecasting;

how far into the future the forecast should be made (days, weeks, months, quarters, years);

how often the forecast should be carried out (the possibility of automating the forecasting process);

what the tolerable prediction error is.

A large number of factors influence the emergence of a need for this or that SP. Therefore, the task of planning the need for SP can be conventionally divided into two stages. At the first stage, during the analysis of factors, the variables that correlate with the need for SP are revealed. During the second stage, the dependence of the need for SP on selected factors is analyzed, and a forecast for the future period of time is made. When planning the needs for SP, it is necessary to possess information that characterizes, in fact, the SP itself:

1) the catalog number of the SP is the number that identifies the part in the technical documentation. It should be noted that in some cases one and the same SP may be indicated in the technical documentation under different catalog numbers. Such variety of catalog numbers is due to the fact that the manufacturer places in the catalog number information about the application of the SP. For example, one and the same SP can have a range of different catalog numbers, by number for different EE samples;

2) the cost of the SP - in this case, we will understand the inventory cost of the SP;

3) the cost of storage and delivery - these parameters allow to estimate the costs of storage and delivery of SP. To determine the cost of delivery and storage, it is necessary to have the characteristics of mass and external dimensions of the SP. It should also be noted that the conditions of SP delivery and storage are not constant, and may change over time (this is affected by the cost of transportation, rental of premises, etc.).

### **References**

1. Methodical guide on the organization and conduct of seasonal service of weapons and military equipment in military units and subunits, that perform tasks in the ATO area, areas of combat capability restoration. – Kyiv: the Ground Forces Command of the Armed Forces of Ukraine. 2015. – 22 p.

2. Baranov A., Baranov Yu., Kalenyk M., Nagahevskyi V., Konturov V. Organization of military equipment maintenance based on combat experience. The scientific heritage: VOL 1. 2022. №98. C. 73–75.

3. Baranov Yu. Influence of maintenance and recovery processes on management efficiency of military equipment technical condition in the Armed Forces of Ukraine. Yu. Baranov, A. Baranov, I. Martyniuk, S. Kovalchuk, S. Shpak. The scientific heritage: VOL 1. 2023. №105(105). P. 90–92.2.

4. Sivak V.A. Fundamentals of car production and repair technology: Training manua. Khmelnytsky: NA PVU, 2003. 143 p.

5. Vorobiov O.M. Methods of rational structure substantiation and use of forces and means of engineering troops equipment repair in the defense operation of

AC JRRF in the process of its recovery: Thesis ... Candidate of Technical Sciences: 20.02.14. Kamyanets-Podilskyi, 2005. 217 p.

6. Demyanchuk B.O. Automotive support of sub-units and units in different conditions of environment and warfare. Part 1. Training manual. Odessa: VA Publishing House, 2014. 262 p.

7. Volokh O.P. Methodology for substantiating the rational values of parameters for maintenance of engineering weapons while using them as intended: Thesis ... Candidate of Technical Sciences: 20.02.14/ Kamianets-Podilskyi, 2007. 175 p.

8. Openko P.V. Methodology for predicting the durability of anti-aircraft missile troops armament while operating according to technical condition: Thesis ... Candidate of Technical Sciences: 20.02.14. Kyiv, 2013. 203 p.

9. Baranov A., Baranov Yu., Korolov O., Maliuk V., Brychynskyi O. Analysis of the current state of engineer vehicles and equipment and peculiarities of their maintenance and repair system functioning. The scientific heritage: VOL 1. 2022. №100. C. 67–69.

10. Shuenkin V.A., Donchenko V.S. Applied models of queuing theory. Kyiv: NMK VO, 1992. 397p.

11. Baranov Yu.M. Management of the technical condition of military equipment and justification of its quality indicators. Yu.M. Baranov, V.I. Kryvtsun, G.B. Zhirov, L.V. Solodeeva. Collection of scientific works of the Military Institute of Kyiv National University. 2017. No. 55. P. 52–61.

12. Sysoev O.O. Problems, tendencies and prospects of development of the system of technical support of troops (forces) in wars and armed conflicts of the late 20th - early 21st centuries. Kyiv: NDUU, 2004. 39 p.

## METHODOLOGY FOR FINDING OPTIMUM CONTROLLER LOCATION ON A SOFTWARE-CONFIGURABLE NETWORK

*Bekbaev G.*

*PhD, Associate Professor of the Department of Social, Humanitarian and Exact Sciences,  
Tashkent State University of Economics*

*Evglevskaya N.*

*PhD, Associate Professor of the Military Academy of Communications  
named after Marshal of the Soviet Union S.M. Budyonny*

*Shinkarev S.*

*PhD, Associate Professor of the Military Academy of Communications  
named after Marshal of the Soviet Union S.M. Budyonny*

DOI: [10.5281/zenodo.8019744](https://doi.org/10.5281/zenodo.8019744)

### **Abstract**

In the context of a digital economy, it is essential to incorporate innovative technologies in the production process to analyze the status of telecommunication networks. This requires solving emerging technical problems through the transition to software-configurable networks. By doing so, the network can be managed more efficiently, resulting in accelerated data transmission by relocating control functions to the controller. Recent research has failed to address the issue of a single point of failure of software-configurable networks, i.e., the controller. However, some scientific papers have proposed an optimal controller placement method to improve the network's reliability. Protecting redundancy, recovery, and optimal controller placement are the three primary ways to ensure the reliability of software-configurable networks. This article proposes a technique and algorithm for finding the optimal location of the controller on a given communication network.

**Keywords:** software-defined network, algorithm, graph, oriented graph, vertex, function, controller, router.

**Introduction:** The research problem is an innovative approach to building communication network architecture. The proposed method allows increasing the network management capability and data transmission level by transferring functions to the controller [1, 2]. This method has the following benefits:

1. It offers programmable approaches to network management, which can be modified through the creation of new applications, leading to improved network management automation;

2. It improves network management by enabling the network to be reconfigured in real-time, adapting to changing operating conditions;

3. It allows for the modification of the network device structure, thereby reducing the number of protocols required to be handled, and only the instructions received from the controller need to be executed;

4. It reduces the cost of the network infrastructure as a whole, owing to cheaper system upgrades and reduced energy consumption.

The mathematical structure of the controller placement problem depends on the configuration of the domain of admissible points and the method used to evaluate the placement quality. This paper only considers placement problems in which the area of acceptable points of service centers is a graph, and the centers can be located at any vertex or on any arc of the graph [3].

### **Methodology for selecting a location for the controller**

To facilitate the description of points on arcs and distances within the graph, it is essential to establish some definitions. The graph's vertex set consists of vertices numbered from 1 to n. Consider an arbitrary arc  $(i, j)$ , whose length is equal to  $a(i, j) > 0$ . Let  $f$  denote a point on the arc  $(i, j)$ , which for all

$0 \leq f \leq 1$  is at  $f \cdot a(i, j)$  units from the vertex  $i$  and at  $(1 - f) \cdot a(i, j)$  units from the vertex  $j$ . Let us call it  $f$  – point. Thus, the quarter point of the arc  $(i, j)$  is the point that is a quarter of the length of the arc  $(i, j)$  from the vertex  $i$ . The zero point of the arc  $(i, j)$  is the vertex  $i$ , and the unit point of the arc  $(i, j)$  is the vertex  $j$ . Hence, the vertices of the graph can also be regarded as arc points. Arc points that are not vertices are called interior points. Any point on an arc must be either an interior point or a vertex. Denote by  $X$  the set of all vertices of the graph, and by  $P$  the set of all points. Thus  $\{P - X\}$  is the set of all interior points. Let  $l(i, j)$  denote the length of the shortest path from vertex  $i$  to vertex  $j$ . Then through  $L$  denote the matrix  $n \times n$ , in which the element  $(i, j)$  is  $l(i, j)$ . The elements in matrix  $L$  are called vertex-top distances. To calculate the elements of matrix  $L$  any of the algorithms can be used: Floyd's algorithm [4, 5] or Danzig's algorithm [6-8]. Let  $l(f - (r, s), j)$  be the length of shortest path from  $f$  – point on the arc  $(r, s)$  to the vertex  $j$ . This value is called the point-top distance. If the arc  $(r, s)$  is undirected, let it be traversed in both directions, i.e. The shortest of the following two distances should be chosen as  $l(f - (r, s), j)$ :

1. Distance from point vertex  $r$  plus distance from vertex  $r$  to vertex  $j$ ;

2. The distance from  $f$  – point to the top  $s$  to the top  $j$ , thus (1):

$$l(f - (r, s), j) = \min \{f \cdot a(r, s) + l(r, j)(1-f) \cdot a(i, j) + l(s, j)\} \quad (1)$$

If the arc  $(r, s)$  is oriented, i.e. Its traversal is only allowed from  $r$  to  $s$ , then the first term in formula (1) can be excluded, then (2):

$$l(f - (r, s), j) = (1-f) \cdot a(i, j) + l(s, j) \quad (2)$$

For a given arc  $(r, s)$  and vertex  $j$  the point-top distance, is a function of  $f$  on the graph should have one of the three types of dependencies shown in Fig.1.

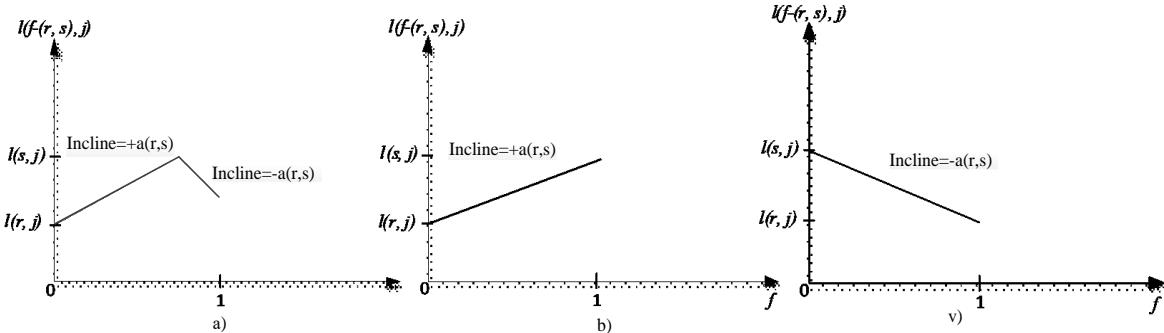


Figure 1. Graphs of the functions characterizing the point-to-top distance

Looking at the shortest distance from the vertex  $j$  to each point on the arc  $(r, s)$ . For some point on the arc  $(r, s)$  this distance gives on a maximum value. It's denoted by  $l'(j, (r, s))$  and called as vertex-arc distance. If there arc  $(r, s)$  is undirected, there are two transfer routes from the vertex  $j$  to  $f$  – point on the arc  $(r, s)$ : through the vertex  $r$  or the vertex  $s$ . The shortest distance from these two routers is chosen. If

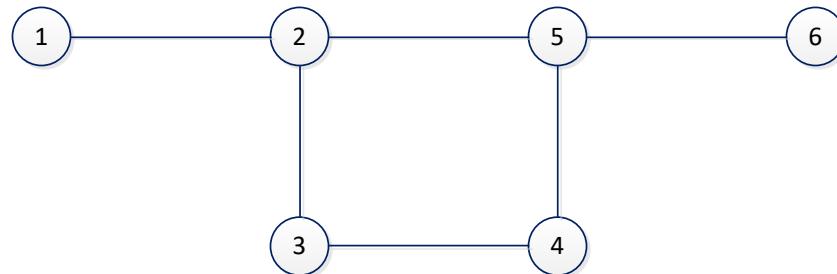


Figure 2. Example of a graph

If  $f$  increases from 0,25 to 0,26 then the shortest distance from vertex 2 to the value of 0,26 on the arc  $(3, 4)$  is  $\min \{1,26; 2; 74\} = 1,26$ .

So, the two distances from a vertex  $j$  to some point on arc equal to each other if this point is the furthest point from the vertex  $j$ . It must be emphasized that total distances are always equal:

$$l(j, r) + f \cdot a(r, s) + l(j, s) + (1-f) \cdot a(r, s) = l(j, r) + l(j, s) + a(r, s)$$

Hence (3):

$$l'(j, (r, s)) = \frac{l(j, r) + l(j, s) + a(r, s)}{2} \quad (3)$$

Looking at the other side, if  $(r, s)$  are oriented, then a few points on the  $(r, s)$  can be reached only with the vertex  $f$ . Hence, the most distant point on  $(r, s)$  from any vertex of the graph is the point closest to the vertex  $s$ . In this case (4):

$$l'(j, (r, s)) = d(j, r) + a(r, s) \quad (4)$$

The graph includes and by pointing out  $L'$  a matrix of dimension  $n \times m$ , in which the element at the intersection of  $i$ -th row and  $k$ -column is the distance of vertex – arc from  $j$ -th vertex to  $k$ -th arc. These matrix values of elements can be calculated with a usage of equations (3) and (4), if the vertex-top distance given by matrix  $L'$  graph arc lengths are known.

And by highlighting  $l(f - (r, s), (t, u))$  the maximum distance from  $f$  – points on the arc  $(r, s)$  to points on the arc  $(t, u)$ . This distance takes a name as the point-arc distance. If the arc  $(r, s)$  is undirected and  $(r, s) \neq (t, u)$  then the route from  $f$  – point on the arc  $(r, s)$  to the farthest point on the arc  $(t, u)$  must come either through the vertex  $r$ , or through the vertex  $s$ . Hence (5):

$$l(f - (r, s), (t, u)) = \min \{f \cdot a(r, s) + l'(r, (t, u)), (1-f) \cdot a(r, s) + l'(s, (t, u))\} \quad (5)$$

If the arc  $(r, s)$  is oriented and  $(r, s) \neq (t, u)$  then the first term in formula (5) can be excluded, then (6):

$$l(f - (r, s), (t, u)) = (1-f) \cdot a(r, s) + l'(s, (t, u)) \quad (6)$$

If  $(r, s) = (t, u)$  is oriented, the furthest point on the arc  $(r, s)$  from  $f$  – point is  $g$  – point, where  $g$  tends towards  $f$  on the side of values smaller than  $f$  – point. It this case (7):

$$l(f - (r, s), (r, s)) = 1 - f \cdot a(r, s) + l(s, r) \quad (7)$$

If  $(r, s) = (t, u)$  and the arc  $(r, s)$  is undirected the maximum distance from  $f$  – point on the arc  $(r, s)$  to  $g$  – point on the arc  $(r, s)$ , in case  $g < f$ , cannot exceed (8):

$$A \equiv \min \{f \cdot a(r, s), 1/2[a(r, s) + l(s, r)]\} \quad (8)$$

The first term in (8) equals the length of the route from  $f$  – point to  $g$  – point within the arc  $(r, s)$ , the second term equals the length of the route from  $f$  and  $g$  – points on the arc  $(r, s)$ , but passing through the top  $s$ . It is resemble with the case of  $g > f$ , the maximum distance from  $f$  – point to  $g$  – point on the arc  $(r, s)$  cannot exceed  $(r, s)$  (9):

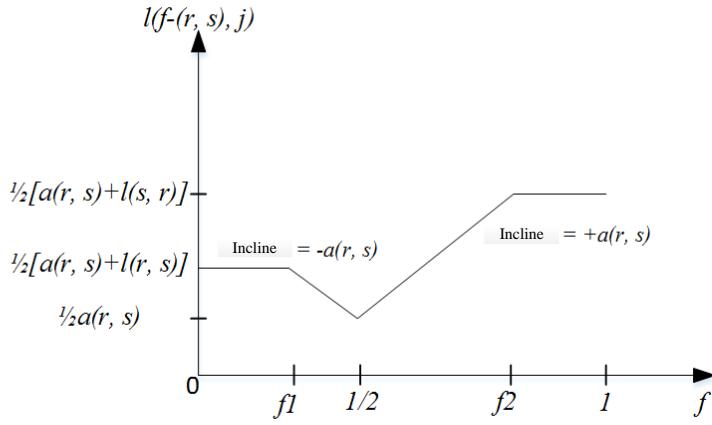
$$B \equiv \min \{(1-f)a(r, s), 1/2[a(r, s) + l(s, r)]\} \quad (9)$$

The first term in expression (9) for  $B$  equals the length of the route from  $g$  – point within the arc  $(r, s)$ , and the second term equals the length of the route from  $f$  – point to  $g$  – point on the arc  $(r, s)$  passing through the vertex  $r$ .

Hence, if the arc  $(r, s)$  is undirected, then  $l'(f - (r, s), (r, s)) = \max\{A, B\}$ , which is equal to (10):

$$l'(f - (r, s), (r, s)) = \max \begin{cases} \min \{f \cdot a(r, s), 1/2[a(r, s) + l(s, r)]\} \\ \min \{(1-f)a(r, s), 1/2[a(r, s) + l(s, r)]\} \end{cases} \quad (10)$$

If there is illustration of the point distance  $l'(f - (r, s), (t, u))$  as a function  $f$  for all  $(r, s) \neq (t, u)$ , then the corresponding curve on the graph will include the same forms as the point-top distance curve presented in Fig.3, since equations (5) and (6) will include accordingly the same form as equations (1) and (2). They have differences only in constants. Looking at the other, if  $l'(f - (r, s), (r, s))$  for any undirected arc  $(r, s)$  is represented as a function of point  $f$ , and then the function curve will include the form shown in Fig.3.

Figure 3. Diagram of the distance function point-arc  $l'(f - (r, s), (t, u))$ 

Therefore, the shown explanation can be systematized as illustrated in the table below:

Table-1

Designation	Name	Method of determination
$a(i, j)$	Arc length	Set
$l(i, j)$	Top-to-top distance	The Floyd or Danzig algorithm
$l'(f - (r, s), j)$	Point-to-top distance	Equations (1) and (2)
$l'(f - (r, s))$	Distance apex-arc	Equations (3) and (4)
$l'(f - (r, s), (t, u))$	Arc-to-arc distance	Equations (5), (6), (7) and (10)

Let (11):

$$MVV(i) = \max \{l(i, j)\} \quad (11)$$

– is the maximal distance from vertex  $i$  to the vertices of the graph. The distance from the vertex  $i$  to the most distant vertex of the graph. Then (12):

$$SVV(i) = \sum_j l(i, j) \quad (12)$$

– is the total distance from a vertex  $i$  to all vertices in the graph.

Let (13):

$$MTV(j - (r, s)) = \max \{l(f - (r, s), j)\} \quad (13)$$

– is the maximal distance from  $f$ -point on the arc  $(r, s)$  to the vertices of the graph. The distance from  $f$ -point on the arc  $(r, s)$  to the distant vertex of the graph, so (14):

$$STV(j - (r, s)) = \sum_j l(f - (r, s), f) \quad (14)$$

– is the total distances from  $f$ -point on the arc  $(r, s)$  to all vertices of the graph.

By providing clear definitions for the maximum and total values of these distances, it is possible to define with precision the different types of placements that will be discussed next.

1. The center of a graph  $G$  is any vertex  $x$  of this graphs that (15):

$$MVV(x) = \min \{MVV(i)\} \quad (15)$$

Thus, the center is any vertex from which the distance to the vertex furthest away from it is minimal.

2. The main center  $G$  is any vertex  $x$  of this graph that (16):

$$MVD(x) = \min \{MVD(i)\} \quad (16)$$

I.e. main center is any vertex whose distance from the furthest point on the graph arcs is minimal.

3. The absolute center of graph  $G$  is any  $f$  point on an arbitrary arc  $(r, s)$  of this graph, that (17):

$$MTV(f - (r, s)) = \min \{MTV(f - (t, u))\} \quad (17)$$

I.e, the absolute center is any point – on the arc whose distance from the furthest vertex of the graph is minimal.

4. The main absolute center of the graph  $G$  a point  $f$  on an arbitrary arc  $(r, s)$  of this graph that (18):

$$MTD(f - (r, s)) = \min \{MTD(f - (t, u))\} \quad (18)$$

Thus, the main absolute center – is any point from which the distance to the furthest point is minimal. The definitions of placement (1...4) are exactly the same as the definitions of the corresponding previous placement types, except that everywhere the maximization operator:

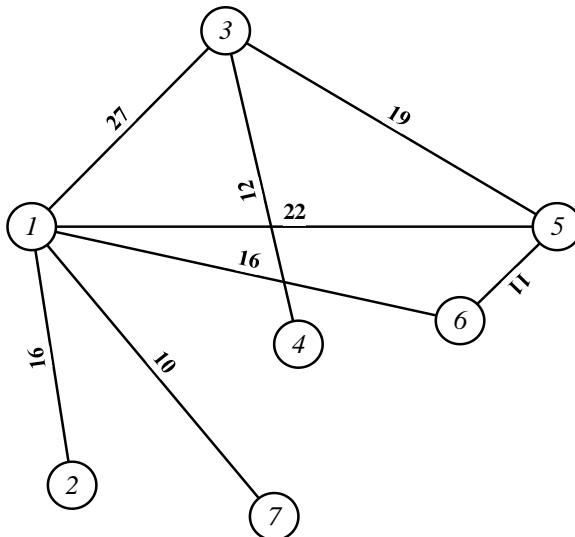
[I.e.  $MVV(i), MVD(i), MTV(f - (i, u)), MTD(f - (t, u))$ ] is replaced by the summation operator [I.e.  $SVV(i), SVD(i), STV(f - (i, u)), STD(f - (t, u))$ ].

The next solution for the problem there is an introduction of the following concepts [9]. The eccentricity  $e(a_i)$  of a vertex in a connected graph  $G(A, B)$  is defined as  $\max \{l(a_i, a_j)\}$ . Radius of a graph  $r(G)$  is the smallest of eccentricities of vertices. The vertices  $a_i$  – is called the central vertex of a graph if  $e(a_i) = r(G)$ ,  $a_i \in A$ . The center of a graph is the total of central vertices. Let's use the set  $N_\lambda^0 = \{a_i | l_{ij} \leq \lambda, a_i \in A\}$ . There is the total of all vertices the distance from a vertex  $a_i$  to which is not greater than  $\lambda$ . For each vertex there is a definition  $C_0(a_i) = \max(l_{ij}), a_i \in A$ . Let  $\lambda_0$  – be the lowest value of  $\lambda$  such that for similar vertex  $a_i : N_\lambda^0(a_i) = A$ , i.e., the path length from the central  $a_i$  to any vertex of the graph does not exceed  $\lambda_0$ . Then  $C_0(a_i) = \lambda_0$ . A vertex  $a_i^*$ , such that  $C_0(a_i^*) = \min[N_0(a_i)], a_i^* \in A$ , is named the center of the graph  $G(A, B)$  [10, 11].

#### Search algorithm and results

So, the making a construction of formula the matrix  $L_{n \times n}$  ( $n$  – is the array of the set  $A$ ), where  $l_{ij} = l(i, j)$  i.e. the matrix of shortest paths. We can use any of the above algorithms [4-12] to create it. Let us calculate the maximum in each row. Thus we get an array of length  $n$ , where  $i$ -th is the minimum length from  $i$  to the other vertices. Find the smallest element in this array. The vertex corresponding to these elements is the center of the graph. So, when there are a few vertices, all of them can be recorded as the center of diagram.

**For instance: to find the centre of a weighted undirected graph.** Observing weighted undirected graph  $G(A, B); A = \overline{1, 7}; B = \{b_{ij}\}$  and  $i, j = \overline{1, 7}$  recorded in Fig.4.

Figure 4. Weighted undirected graph  $G(A, B)$ 

Let us make a matrix of the lengths of the shortest arc between each pair of vertices –  $L^0$ . If there is no arc between the vertices  $i$  and  $j$  is assigned to the element  $l(i, j)$  of the matrix 0.

$$L^0 = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 27 & 0 & 22 & 16 & 10 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 0 & 12 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 0 & 19 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

With the usage Floyd-Worschell algorithm [4, 5] we can get a matrix of shortest path lengths between each pair of vertices in the graph:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 27 & 39 & 22 & 16 & 10 \\ 16 & 0 & 43 & 55 & 38 & 32 & 26 \\ 27 & 43 & 0 & 12 & 19 & 30 & 37 \\ 39 & 55 & 12 & 0 & 31 & 42 & 49 \\ 22 & 38 & 19 & 31 & 0 & 11 & 32 \\ 16 & 32 & 30 & 42 & 11 & 0 & 26 \\ 10 & 26 & 37 & 49 & 32 & 26 & 0 \end{pmatrix}$$

So, according to the result of matrix of shortest path lengths, find the eccentricity for each vertex of the graph:

$$e(a_i) = \max \{l(a_i, a_j)\};$$

$$e(a_1) = 39;$$

$$e(a_2) = 55;$$

$$e(a_3) = 43;$$

$$e(a_4) = 55;$$

$$e(a_5) = 38;$$

$$e(a_6) = 42;$$

$$e(a_7) = 49.$$

The centre of the graph is a vertex  $A$ , for which

$e(a_i) = r(G)$ ,  $a_i \in A$ . The vertex «5» has the minimum radius value  $e(a_5) = 38$ , which means that vertex «5» is the centre of the graph.

#### Algorithm for placing control points, taking into account physical and geographical conditions.

The algorithm for placing control points in consideration of physical and geographical conditions has been a subject of various studies [4-12], in these studies, the problem of determining the node base is addressed by identifying the set of nodes  $A$  that meet the required network resource standards concerning channel quality. In addition to satisfying the requirements for channel quality and determining the number of nodes, solving the problem of optimal node placement in the designated area is also necessary. The node basis is a set

$|A| = N$ , where  $|A| = \{a_i\}$ ,  $\{x_i, y_i\}$ ,  $i=1, N$  – is a set of communication nodes (CN), and  $\{x, y\}$  – geographical coordinates of communication nodes. At the time of determining the controller's location on the network, the location of the CN  $A$  – will be determined. Formally, the formulation of the problem of forming a

node base can be written:  $R_v = \sum_{i=1}^N a_i \rightarrow \min$ .

$$l(a_1; a_2) \approx l(a_2; a_3) \approx \dots \approx l(a_r; a_k) \approx \dots \approx l(a_g; a_i) \approx \dots \approx l(a_i; a_j) \approx R_0$$

where  $R_0$  – is the rational distance between neighboring network nodes.

The rational distance among neighboring network nodes in the  $R_0$  network is determined based on the maximum length of the composite link  $l_{\max}$  and similarly as the most stringent demands for the type of communication required for the digital channel (DC) parameters (19):

$$R_0 = f(J_{vx1}, J_{vx}^{TP}, l_{\max}, n) \quad (19)$$

One of the alternative solutions is to cover the operational area with a circle of radius  $r = R_0/2$ , where the coordinates of the center of the circle will indicate

$$F_t = \frac{3\pi \frac{(1/2)^2}{6}}{\sqrt{3}/4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,9069.$$

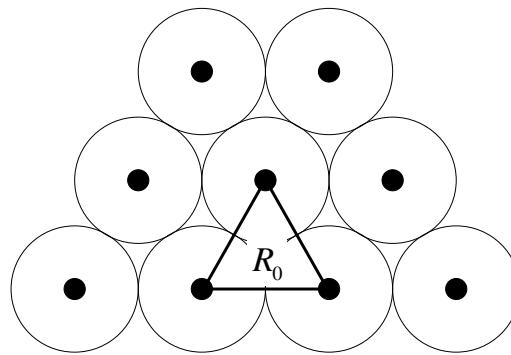


Figure 5. Covering a plane with circles using a triangle

A specific feature of the task of forming a nodal base is the presence of restrictions (physic-geographical conditions of the area and conditions of the operational situation) on the introduction of CTS (20):

$$\Re : F(a, b), g_k(\bar{a}) \leq 0, \quad k=1, h \quad (20)$$

where  $a$  and  $b$  – are the width and depth of the operational area, and  $g_k(\bar{a}) \leq 0$  – are limitations on the introduction of CTS, determined by the physical and geographical features of the operational area.

If at the first version of the total location of the CS

In essence, fulfilling quality requirements can be seen as the process of creating channels that meet a specific quality standard. This involves selecting the desired path on the network and determining the channel rank, which dictates the allowable phase jitter and digital signal delay time. In order to make optimal use of line power, it is widely accepted in network and transmission system theory that simple channel lengths along the path must be equal:

the possible location of the transport network node to fulfill the necessary condition for the quality of the DC. To select a coverage option, it is necessary to solve the problem of geometric optimization [13, 14], where it is required to find the efficiency of packing on a plane by circles of a given radius.

Consider the problem of packing equal circles with a radius  $r = 1/2$  on a plane in such a way that each circle touches six other circles (Fig.5). Each such circle can be seen as a circle inscribed into a regular hexagon with the same centre, these hexagons fill the plane. The efficiency  $F_t$  is obtained by comparing the area of a regular triangle, whose vertices are the centers of three adjacent circles, with the areas of the sectors of the three circles contained within the triangle. The efficiency of such packing is equal to

the coordinates of the input node got into the constraint area, then this point is brought the constraint line. This task is solved by the gradient projection method, where the aim function and the constraints are non-linear [15]. The algorithm of node base formation is presented in Fig.6.

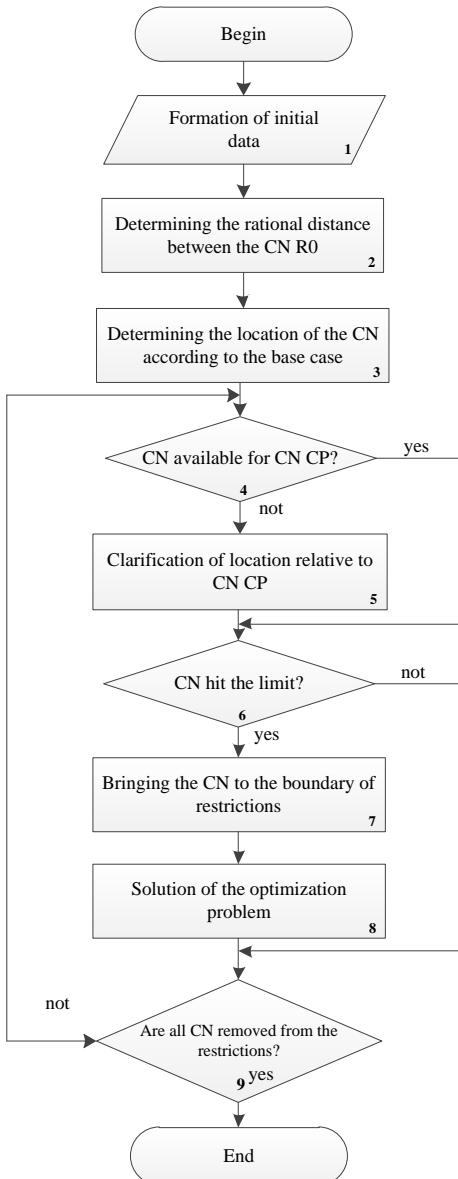


Figure 6. Block diagram of the algorithm for the formation of the nodal base

This algorithm includes two stages. At the first stage the basic solution (2) and (3) blocks of the algorithm are formed. It is based on the geometrical optimization methods and consists of covering the operational area with circles of  $R_0/2$ , where  $R_0$  is a rational distance between the CN. Then an option is marked in terms of control point (CP) accessibility to CN and constraint on CN insertion.

#### Conclusion

In the case in the calculation, if the length of the reference lines of the CN CP does not allow to be tied to the CN, then the location is specified. In the case of a hit by the CN, in the basic case, it is necessary to find the optimal location with respect to the constraints. Determining the location of the CN relative to other CN and CN CP is carried out using the modified Rosen algorithm [11] using blocks (7 and 8) of the current algorithm.

#### References

1. Smelyansky R.L. Software-configurable networks. [Electronic resource] // Open Systems: Journal of Network Solutions / LAN. URL: <https://www.osp.ru/os/2012/09/130324912>
2. Kolomeyets A.E., Surkov L.V. "Software-configurable networks based on Open Flow protocol" // Engineering Herald 05.05.2014. pp. 519-524
3. Mainica E. Algorithms of optimization on networks and graphs: Translated from English: Mir, 1981. - 323 p.
4. Floyd's algorithm. URL: [https://emmaxx.ru/algo/floyd\\_marshall\\_algorithm](https://emmaxx.ru/algo/floyd_marshall_algorithm)
5. Domnin L.N. Elements of graph theory: textbook. - Penza: Penza State University, 2007. - 144 p.
6. Novikov F.A. Discrete Mathematics for Programmers: a textbook for universities. 3rd ed. - St. Petersburg: Peter, 2009. 384 p.
7. Feofanova V.A., Vorotnikov V.I. Discrete Mathematics: textbook. Nizhny Tagil: NTI (branch) urfu, 2013. - 256 p.
8. The Danzig Algorithm. URL: [https://scask.ru/g\\_book\\_dpr.php?Id=33](https://scask.ru/g_book_dpr.php?Id=33)

- 
9. Tutt W. Graph Theory: Translated from English: World, 1988. - 424 p.
- 10) Berge C. Graph theory and its applications. Translated from French / Edited by I. A. Weinstein. - Moscow: IL, 1962. - 319 p.
11. Zykov A.A. Fundamentals of graph theory. - Moscow: 2004. - 664 p.
12. Gorbach A.N., Muravtsov A.A. Improvement of algorithm of node base construction of analogue-digital primary association communication network. Proceedings of XXXI Military Scientific Conference. 29 April 2002. Tver: Publishing house of All-Russian Military-Piliminary Association, 2002. pp. 56-58.
13. Yasinsky S. A. Unified mathematical models for analysis and synthesis of telecommunication network elements. Spb.: VAS, 2003. - 183 p.
14. Saati T. Integer optimization methods and related extreme problems. Moscow: Mir, 1973. – 304 p.
15. Bazara M., Shetty K. Non-linear programming. Theory and algorithms. Moscow: Mir, 1982. - 583 p.

**The scientific heritage**  
(Budapest, Hungary)

The journal is registered and published in Hungary.

The journal publishes scientific studies, reports and reports about achievements in different scientific fields.

Journal is published in English, Hungarian, Polish, Russian, Ukrainian, German and French.

Articles are accepted each month.

Frequency: 24 issues per year.

Format - A4

**ISSN 9215 — 0365**

All articles are reviewed

Free access to the electronic version of journal

Edition of journal does not carry responsibility for the materials published in a journal.

Sending the article to the editorial the author confirms it's uniqueness and takes full responsibility for possible consequences for breaking copyright laws

**Chief editor:** Biro Krisztian

**Managing editor:** Khavash Bernat

- Gridchina Olga - Ph.D., Head of the Department of Industrial Management and Logistics (Moscow, Russian Federation)
- Singula Aleksandra - Professor, Department of Organization and Management at the University of Zagreb (Zagreb, Croatia)
- Bogdanov Dmitrij - Ph.D., candidate of pedagogical sciences, managing the laboratory (Kiev, Ukraine)
- Chukurov Valeriy - Doctor of Biological Sciences, Head of the Department of Biochemistry of the Faculty of Physics, Mathematics and Natural Sciences (Minsk, Republic of Belarus)
- Torok Dezso - Doctor of Chemistry, professor, Head of the Department of Organic Chemistry (Budapest, Hungary)
- Filipiak Paweł - doctor of political sciences, pro-rector on a management by a property complex and to the public relations (Gdansk, Poland)
- Flater Karl - Doctor of legal sciences, managing the department of theory and history of the state and legal (Köln, Germany)
- Yakushev Vasiliy - Candidate of engineering sciences, associate professor of department of higher mathematics (Moscow, Russian Federation)
- Bence Orban - Doctor of sociological sciences, professor of department of philosophy of religion and religious studies (Miskolc, Hungary)
- Feld Ella - Doctor of historical sciences, managing the department of historical informatics, scientific leader of Center of economic history historical faculty (Dresden, Germany)
- Owczarek Zbigniew - Doctor of philological sciences (Warsaw, Poland)
- Shashkov Oleg - Candidate of economic sciences, associate professor of department (St. Petersburg, Russian Federation)
- Gál Jenő - MD, assistant professor of history of medicine and the social sciences and humanities (Budapest, Hungary)
- Borbely Kinga - Ph.D, Professor, Department of Philosophy and History (Kosice, Slovakia)
- Eberhardt Mona - Doctor of Psychology, Professor, Chair of General Psychology and Pedagogy (Munich, Germany)
- Kramarchuk Vyacheslav - Doctor of Pharmacy, Department of Clinical Pharmacy and Clinical Pharmacology (Vinnytsia, Ukraine)

«The scientific heritage»

Editorial board address: Budapest, Kossuth Lajos utca 84, 1204

E-mail: [public@tsh-journal.com](mailto:public@tsh-journal.com)

Web: [www.tsh-journal.com](http://www.tsh-journal.com)